詳細解答

STEP II 2011，第 9 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP II 2011，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

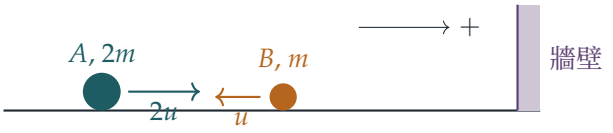
step.maths.org/questions/11-s2-q9

關鍵思路

這裏每一次碰撞都是正碰（direct collision），所以每次都用同樣兩條方程解決：動量守恆（conservation of momentum）和牛頓（Newton）恢復定律（law of restitution）。真正的危險只在於正負號。一開始就固定一個正方向（向着牆壁），把每個速度都寫成該方向上帶正負號的數，代數運算便會自然理順。最後的論斷歸結為證明某個表達式恆為正；由於它是 f 的線性（linear）函數，我們只需考察 f 取值範圍的兩個端點。

解答

模型。 我們把 A 和 B 視為光滑（smooth）平面上的質點（particle），所以除碰撞時刻外沒有水平力作用；牆壁亦是光滑的，因此它只會令 B 的速度反向（並按 f 縮放）。第一次碰撞後 B 繼續前進並撞向牆壁，所以牆壁位於 B 那一側，即沿 A 原本運動方向、在 B 之外。我們取該方向為正方向。於是沿直線的次序始終是 A、B、牆壁。



第一次碰撞

碰撞前 A 的速度為 $2u$，B 的速度為 $-u$。設碰撞後兩者的速度分別為 v_A 和 v_B。由動量守恆：

$$2m(2u) + m(-u) = 2m\,v_A + m\,v_B \quad \Longrightarrow \quad 2v_A + v_B = 3u.$$

接近速率為 $2u-(-u)=3u$。由於 B 在 A 的前方，分離速率為 v_B-v_A，牛頓恢復定律給出

$$v_B-v_A=3eu.$$

第一條方程減去第二條方程，得 $3v_A=3u-3eu$，所以

$$v_A=(1-e)u,\qquad v_B=(1+2e)u.$$

兩者皆 ≥ 0，所以碰撞後 A 以速率 $(1-e)u$ 向牆壁移動（若 $e=1$ 則靜止），而 B 以速率 $(1+2e)u$ 向牆壁移動。這與 B 隨後撞到牆壁相符。

牆壁

牆壁光滑而碰撞為正碰，所以 B 沿直線以速率 $f(1+2e)u$ 反彈，其速度變為 $-f(1+2e)u$。與此同時，A 仍以速度 $(1-e)u\geq 0$ 運動，因為沒有任何力作用於它。B 現正向 A 移動，所以兩者必定再次相遇。

第二次碰撞

第二次碰撞前一刻，速度為

$$A:\ (1-e)u,\qquad B:\ -f(1+2e)u.$$

設碰撞後的速度為 w_A 和 w_B。由動量守恆得

$$2w_A+w_B=2(1-e)u-f(1+2e)u.$$

想一想 這一次恢復方程應該怎樣寫，哪個減哪個？

B 仍然是較接近牆壁的質點，所以分離速度仍是 w_B-w_A。接近速率是 A 的速度減去 B 的速度，即 $(1-e)u+f(1+2e)u$。因此

$$w_B-w_A=e[(1-e)u+f(1+2e)u].$$

為求出 w_B，把這條方程的兩倍加到動量方程上：

$$\begin{aligned}3w_B&=2(1-e)u-f(1+2e)u+2e(1-e)u+2ef(1+2e)u\\&=2(1-e)(1+e)u+f(1+2e)(2e-1)u\\&=2(1-e^2)u-(1-4e^2)fu.\end{aligned}$$

所以

$$w_B=\tfrac{2}{3}(1-e^2)u-\tfrac{1}{3}(1-4e^2)fu,$$

此速度以正方向（即向着牆壁）量度。這就是所求的結果。

B 總是向牆壁移動

我們須證明對所有 $0 < e \le 1$ 及 $0 < f \le 1$，都有 $w_B > 0$。由於 $u > 0$，這等同於證明

$$g(f) = 2(1-e^2) + (4e^2-1)f > 0.$$

$1 - 4e^2$ 一項可正可負，所以不能直接把它略去。改為固定 e，注意 g 是 f 的線性函數，而且

$$g(0) = 2(1-e^2) \ge 0, \qquad g(1) = 2 - 2e^2 + 4e^2 - 1 = 1 + 2e^2 > 0.$$

$[0,1]$ 上的線性函數是其兩端值的加權平均：$g(f) = (1-f)\,g(0) + f\,g(1)$。當 $0 < f \le 1$ 時，第一項 ≥ 0，而第二項嚴格為正（因為 $f > 0$ 且 $g(1) > 0$），所以 $g(f) > 0$。因此 $w_B > 0$，無論 e 和 f 取何值，B 在第二次碰撞後都向牆壁移動。

驗算

- 取 $e = f = 1$（全程完全彈性），A 在第一次碰撞時完全停下，B 以 $3u$ 離開，再以 $3u$ 返回，撞向一個質量為它兩倍的靜止質點。公式給出 $w_B = 0 + u = u$，與彈性碰撞的結果 $\frac{m-2m}{3m}(-3u) = u$ 吻合。
- 取 $e = f = \frac{1}{2}$，公式給出 $w_B = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}u = \frac{1}{2}u$。逐步模擬位置和碰撞，亦得到相同的值 $0.5u$。
- 對正負號而言，最壞情況是 $e = 1$ 而 f 很小。此時 $w_B = fu$，雖然很小，但仍然為正。

常見錯誤

- 在第二次碰撞中用速率代替帶正負號的速度，因而把 B 的反彈速度符號弄錯。
- 因為 B「從牆壁那邊過來」而把恢復方程寫成 $w_A - w_B$。質點沿直線的次序並沒有改變，所以分離速度仍是 $w_B - w_A$。
- 假設 $1 - 4e^2 > 0$ 來斷言 $w_B > 0$。當 $e > \frac{1}{2}$ 時此假設不成立，這正是論證必須用到 $f \le 1$ 的原因。

STEP 之外

恢復定律是一個經驗模型（empirical model）。在大學一年級的課程中，你會同時接觸一個更簡潔的概念——質心參考系（centre-of-mass frame）：在該參考系中總動量為零，而恢復係數為 e 的碰撞只是把兩個速度都乘以 $-e$。這令第一次碰撞之類的結果幾乎一

目了然。與牆壁的反覆碰撞亦會在撞球問題（billiard problems）和計數論證中再次出現，例如那個著名的問題：兩個木塊與一面牆之間的碰撞次數，竟然給出 π 的各位數字。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種精神講解動量與碰撞。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。