詳細解答

STEP II 2011，第 8 題

純數學 • 圓的漸伸線

> **STEP II 2011，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q8

關鍵思路

在任何時刻，繩子都由兩段組成：一段是圓上的弧，其長度可以由角度直接讀出；另一段是沿切線（tangent）離開圓的直線段。由於總長度固定，直線段的長度就是剩下的部分；而切線與半徑垂直，所以用向量（vector）就能輕易定出 B 的位置。至於最後的面積，留意整個被掃過的區域就是「外支下方的面積，減去內支下方的面積，再減去半圓」。

解答

參數方程

設 $P = (\cos t, \sin t)$ 為繩子離開圓的點，因此 t 是由正 x 軸到 OP 的角度。開始時 $P = A = (-1, 0)$，所以 $t = \pi$；當繩子從圓的頂部繞過去時，P 沿順時針方向移動，t 遞減至 0。

與圓接觸的那段繩子是由角度 π 到角度 t 的弧。半徑為 1，所以這段弧長為 $\pi - t$。繩子長度為 π，所以直線段 PB 的長度為

$$\pi - (\pi - t) = t.$$

由於繩子拉緊，PB 是圓在 P 點的切線，因此它垂直於 $OP = (\cos t, \sin t)$。與 OP 垂直的兩個單位向量是 $\pm(\sin t, -\cos t)$。開始時（$t = \pi$）繩子由 A 垂直向上，方向為 $(0, 1) = (\sin \pi, -\cos \pi)$，而根據連續性（continuity），符號在整個過程中保持不變。因此

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + t\,(\sin t, -\cos t),$$

即

$$x = \cos t + t \sin t, \qquad y = \sin t - t \cos t,$$

正如所求。（驗算：$t=\pi$ 給出 $(-1,\pi)$，即 B 的起始位置；$t=0$ 給出 $(1,0)$，即 B 碰到圓的位置。）

x 的最大值

求導後，$\pm\sin t$ 與 $\pm\cos t$ 各項互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

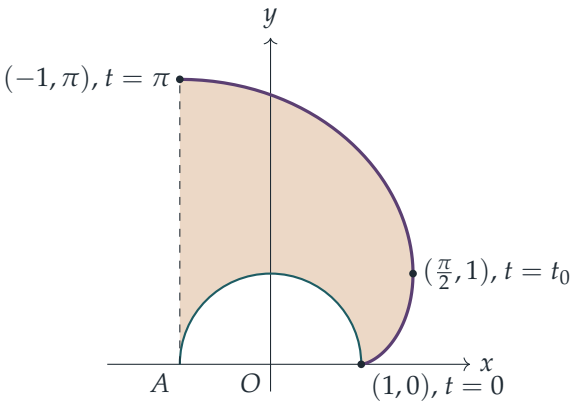
當 $0<t<\pi$ 時，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\cos t$ 在 $t<\frac{\pi}{2}$ 時為正，在 $t>\frac{\pi}{2}$ 時為負。所以當 t 取遍 $[0,\pi]$ 時，x 先遞增後遞減，最大值出現在

$$t_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{此時}(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

草圖

有兩個事實有幫助。第一，當 $0<t\le\pi$ 時 $y>0$：若 $t\le\frac{\pi}{2}$，則由於 $\tan t > t$，$y=\cos t(\tan t - t)>0$（當 $t=\frac{\pi}{2}$ 時直接有 $y=1$）；若 $t>\frac{\pi}{2}$，則 $\cos t<0$，所以 y 的兩項都非負，且 $\sin t - t\cos t>0$。第二，$x^2+y^2 = 1+t^2$，所以 B 永遠在圓外，而且離圓的距離隨 t 增大。此外 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t\sin t \ge 0$，所以 y 隨 t 穩定遞增。

因此曲線由 $(1,0)$ 出發（該處 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan t = 0$，所以它水平地離開 x 軸），上升至最右點 $(\frac{\pi}{2},1)$，該處切線垂直，然後掃過圓的頂部回到 $(-1,\pi)$，該處再次水平。這條曲線是圓的漸伸線（involute）。



陰影區域介乎曲線、繩子的初始位置（虛線）與半圓之間，就是繩子掃過的面積。

$\pi \geq t \geq t_0$ 部分的面積

在曲線的這一部分，x 由 $\frac{\pi}{2}$（在 $t = \frac{\pi}{2}$）遞減至 -1（在 $t = \pi$），且 $y > 0$。所以這段弧與 x 軸之間的面積為

$$\int_{-1}^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{\pi/2} y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} (t^2\cos^2 t - t\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t,$$

其中我們對調了上下限以吸收負號。我們需要兩個積分，都是先用倍角公式（double-angle formula），再用分部積分（integration by parts）。寫 $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$ 及 $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$。用分部積分，

$$\int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{2}t\cos 2t + \tfrac{1}{4}\sin 2t,$$
$$\int t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t - \int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t + \tfrac{1}{2}t\cos 2t - \tfrac{1}{4}\sin 2t.$$

在 $t = \pi$ 時，$\sin 2t = 0$，$\cos 2t = 1$；在 $t = \frac{\pi}{2}$ 時，$\sin 2t = 0$，$\cos 2t = -1$。因此

$$\int_{\pi/2}^{\pi} t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \tfrac{1}{2}\Big(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{3\pi}{8},$$
$$\int_{\pi/2}^{\pi} t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{3}t^3\Big]_{\pi/2}^{\pi} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7\pi^3}{48} + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8}.$$

所以所求面積為

$$\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8} - \Big(-\frac{3\pi}{8}\Big) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}.$$

繩子掃過的面積

想一想 $t \geq t_0$ 那段弧下方的區域比掃過的區域多。必須除去甚麼？

剛求得的面積，是外弧（$t_0 \leq t \leq \pi$）與 x 軸之間、$-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 範圍內的全部區域。掃過的區域等於這個面積減去位於其下方的兩塊：上半圓（semicircle），面積為 $\frac{\pi}{2}$；以及內弧（$0 \leq t \leq t_0$）與 x 軸之間、$1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 範圍內的狹長小塊。內弧位於圓外（因為當 $t > 0$ 時 $x^2 + y^2 = 1 + t^2 > 1$），並位於外弧下方，所以這兩塊互不重疊，相減是合理的。

在內弧上 x 隨 t 遞增，所以狹長小塊的面積為

$$\int_0^{\pi/2} y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (t\sin t\cos t - t^2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

使用同樣的原函數（antiderivative），現在以 $t = 0$ 為下限（該處 $\sin 2t = 0$，$\cos 2t = 1$），

$$\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$
$$\int_0^{\pi/2} t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{24} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

所以狹長小塊的面積為 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}$（約 0.14，又小又正，令人放心）。因此繩子掃過的面積為

$$\left(\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi^3}{48} = \frac{\pi^3}{6}.$$

驗算

- 最後的答案有更簡潔的求法。當 t 減少 δt 時，繩子的直線段（長度為 t）繞着一個基本上固定的點轉過角度 δt，掃出面積約為 $\frac{1}{2}t^2\,\delta t$ 的細小扇形（sector）。把這些加起來得 $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6}$，結果一致。
- 數值上：用辛普森法則（Simpson's rule）求外弧下方的面積得 6.87794，與 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}$ 吻合；對陰影區域的邊界使用鞋帶公式（shoelace formula）得 5.16771 $\approx \frac{\pi^3}{6}$。

常見錯誤

- 以為直線段的長度是 $\pi - t$（那是弧長），或者在兩個切線方向中選錯了一個；檢查 $t = \pi$ 的情況可以同時發現這兩種錯誤。
- 把積分上下限保留為 t_0 到 π，卻沒有留意 x 沿該段弧遞減，結果得出負的「面積」。
- 忘記內弧下方的小區域，結果得出掃過面積為 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}$。

STEP 之外

繩子從一條曲線上解開時，其末端描出的曲線稱為漸伸線，而繩子所解開的那條曲線則稱為它的漸屈線（evolute）：漸伸線在 B 點的曲率中心（centre of curvature）正是繩子離開圓的點 P。大多數齒輪的齒形都採用圓的漸伸線，因為兩個這樣的齒互相滾動時，速度比保持不變。「驗算」一節中的「細小扇形」論證，其實就是極坐標面積公式（polar-area formula）$\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 的化身。想進一步了解曲率及這類曲線，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）；至於背後嚴謹的微積分，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。