詳細解答

STEP II 2011，第 7 題

純數學 • 數列與級數

> **STEP II 2011，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q7

關鍵思路

切勿逐項處理這兩個數列（sequence）：把每個和拆成 λ 的冪之和與 μ 的冪之和，再分別套用幾何級數（geometric series）公式。這兩個數滿足 $\lambda+\mu=2$ 及 $\lambda\mu=-1$，所以它們是 $x^2=2x+1$ 的根。單憑這條二次方程（quadratic equation），所有棘手的分母都會化簡掉。另一個工具是平方：b_k^2 和 a_k^2 都會化成 a_{2k} 加一個常數。

解答

首先列出一些全程都會用到的事實：

$$\lambda-1=\sqrt{2},\qquad \mu-1=-\sqrt{2},\qquad \lambda\mu=1-2=-1,\qquad \lambda-\mu=2\sqrt{2}.$$

此外 $a_0=2$ 及 $b_0=0$。

第 (i) 部分

由於 $\lambda\neq 1$ 且 $\mu\neq 1$，我們可以對每個和套用幾何級數公式：

$$\sum_{r=0}^{n}\lambda^r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}},\qquad \sum_{r=0}^{n}\mu^r=\frac{\mu^{n+1}-1}{\mu-1}=-\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}.$$

把第一個和減去第二個和，

$$\sum_{r=0}^{n}b_r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{a_{n+1}-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{n+1},$$

正是所求。若改為把兩個和相加，兩個 -1 便互相抵消：

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} a_r = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b_{n+1}.}$$

（快速檢驗：當 $n=0$ 時，這式表示 $a_0 = b_1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2$，是正確的。）

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分，內層的和是 $b_{m+1}/\sqrt{2}$。因此

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{2n} b_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{2n+1} b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=0}^{2n+1} b_s,$$

最後一步成立，是因為 $b_0 = 0$。現在以 $2n+1$ 代替 n 應用第 (i) 部分，得

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2} + \frac{a_{2n+2}}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1. \qquad (*)$$

? **想一想** 怎樣把 a_{2n+2} 與 b_{n+1}^2 聯繫起來？

我們取平方，並利用 $\lambda\mu = -1$ 處理交叉項：

$$b_{n+1}^2 = \lambda^{2n+2} + \mu^{2n+2} - 2(\lambda\mu)^{n+1} = a_{2n+2} - 2(-1)^{n+1}, \qquad a_{n+1}^2 = a_{2n+2} + 2(-1)^{n+1}.$$

若 n 是奇數，則 $n+1$ 是偶數，所以 $b_{n+1}^2 = a_{2n+2} - 2$。於是 $(*)$ 等於 $\frac{1}{2}(a_{2n+2}-2) = \frac{1}{2}b_{n+1}^2$，正是所求。

若 n 是偶數，則 $(-1)^{n+1} = -1$，所以這時等於 $a_{2n+2} - 2$ 的是 a_{n+1}^2。因此

$$\boxed{n \text{ 為偶數：} \quad \sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2}$$

或等價地寫成 $\frac{1}{2}b_{n+1}^2 - 2$。

第 (iii) 部分

由第 (i) 部分，再用第 (ii) 部分的平方恆等式，

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \tfrac{1}{2}b_{n+1}^2 = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}.$$

對於第二個和，我們同樣把它拆成兩個幾何級數，這次公比分別是 λ^2 和 μ^2：

$$\sum_{r=0}^{n} \lambda^{2r+1} = \lambda\,\frac{\lambda^{2n+2}-1}{\lambda^2-1}.$$

想一想 λ^2-1 可以化簡嗎？

可以。由於 $\lambda^2=2\lambda+1$，得 $\lambda^2-1=2\lambda$，於是因子 λ 被約去，和為 $\frac{1}{2}(\lambda^{2n+2}-1)$。由於 μ 滿足同一條二次方程，$\mu^2-1=2\mu$，而 μ 的和為 $\frac{1}{2}(\mu^{2n+2}-1)$（注意 $\mu^2\neq 1$，所以公式適用）。兩者相加，

$$\sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_{2n+2}-2\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2}-1.$$

因此

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 - \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2}-(-1)^{n+1}\right) - \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2}-1\right) = 1+(-1)^n.$$

若 n 是偶數，此式等於 2，正是所求。若 n 是奇數，此式等於 0，所以

$$\boxed{n \text{ 為奇數：} \quad \left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1}.}$$

驗算

各 a_n 都是整數，並滿足 $a_{n+1}=2a_n+a_{n-1}$：$2,2,6,14,34,82,198,478,\ldots$。在第 (ii) 部分取 $n=3$，部分和 $2,4,10,24,58,140,338$ 加起來是 576。由於 $b_4=24\sqrt{2}$，得 $\frac{1}{2}b_4^2=576$，兩者吻合。在第 (iii) 部分取 $n=2$：$(2+2+6)^2-(2+14+82)=100-98=2$。取 $n=1$：$(2+2)^2-(2+14)=0$。我們用電腦驗證了全部三個部分，包括奇偶兩種情況（parity），直至 n 等於 24 的每一個值。

常見錯誤

- 忘記 $\mu-1=-\sqrt{2}$ 是負數，以致在第 (i) 部分把 a 和 b 的角色對調。
- 寫成 $(\lambda\mu)^{n+1}=1$ 而不是 $(-1)^{n+1}$；這個正負號正是要按奇偶分情況的關鍵所在。
- 在第 (ii) 部分移動 b_{m+1} 之和的下標時，沒有留意到正是 $b_0=0$ 才容許和由 0 開始。

STEP 之外

兩個數列都滿足線性遞推關係（linear recurrence）$x_{n+1}=2x_n+x_{n-1}$，其特徵方程（characteristic equation）為 $x^2=2x+1$。所以 λ 和 μ 是它的根，而 a_n 和 b_n 是特解。由於 $\lambda^n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，恆等式 $\lambda^n\mu^n=(-1)^n$ 便化為 $a_n^2-b_n^2=4(-1)^n$，這是環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

中的一條佩爾型方程（Pell-type equation）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）闡述了這類單位（units）與 $\sqrt{2}$ 的連分數（continued fractions）之間如何互相配合。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。