詳細解答

STEP II 2011，第 6 題

純數學 • 分部積分法

STEP II 2011，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s2-q6

關鍵思路

被積函數（integrand）$[f'(x)]^2[f(x)]^n$ 只差一個 f' 的因子，就會變成一眼便能積出來的形式，因為 $f'(x)[f(x)]^n$ 正是 $[f(x)]^{n+1}/(n+1)$ 的導數（derivative）。所以我們用分部積分（integration by parts），把這一部分拆出來。剩下的積分含有 f''，而條件 $f''=kff'$ 又把它變回同樣容易處理的形式 $f'f^m$。至於各個應用，關鍵就在於選取 f 和 n，使所給的被積函數等於 $[f']^2f^n$，再求出 k。

解答

一般結果

以 f 代表 $f(x)$，其餘類推。用分部積分，取 $u=f'$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'f^n$，於是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f''$ 及 $v=\dfrac{f^{n+1}}{n+1}$（這沒有問題，因為 $n\geq 1$ 表示 $n+1\neq 0$）：

$$\begin{aligned} I=\int f'\cdot f'f^n\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int f''f^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{k}{n+1}\int f'f^{n+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{利用} f''=kff' \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{kf^{n+3}}{(n+1)(n+3)}+C. \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{I=\frac{f'(x)\,[f(x)]^{n+1}}{n+1}-\frac{k\,[f(x)]^{n+3}}{(n+1)(n+3)}+C}$$

這正是題目要求的、以 $f(x)$、$f'(x)$、k 和 n 表示的式子。

第 (i) 部分

對於 $f(x) = \tan x$，我們有 $f'(x) = \sec^2 x$ 及

$$f''(x) = 2\sec x \cdot \sec x \tan x = 2\tan x \sec^2 x = 2f(x)f'(x),$$

所以條件成立，且 $k = 2$。代入公式得

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\sec^2 x \tan^{n+1} x}{n+1} - \frac{2\tan^{n+3} x}{(n+1)(n+3)} + C. \tag{1}$$

驗證。直接計算：利用 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ 及代換（substitution）$t = \tan x$，$\mathrm{d}t = \sec^2 x \,\mathrm{d}x$：

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \int (1+t^2)t^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3} + C.$$

用 $\sec^2 x = 1 + t^2$ 改寫 (1) 的右方，得

$$\frac{(1+t^2)t^{n+1}}{n+1} - \frac{2t^{n+3}}{(n+1)(n+3)} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{(n+3)-2}{(n+1)(n+3)}\,t^{n+3} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3},$$

答案相同。所以對 $f = \tan$ 而言，結果得到驗證。

所求積分。由於

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} = \tan^4 x \sec^4 x = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

這是 (1) 中 $n = 4$ 的情況。利用剛才得到的化簡形式，

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

第 (ii) 部分

想一想 應該取哪一個 f？那個 $\sec^2 x$ 又從何而來？

括號 $(\sec x + \tan x)$ 顯然是 f 的候選，所以試取 $f(x) = \sec x + \tan x$。它的導數是

$$f'(x) = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x(\tan x + \sec x) = \sec x\, f(x).$$

這就是關鍵事實：對 f 求導，只不過是把它乘以 $\sec x$。因此

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sec x \tan x\, f(x) + \sec x\, f'(x) = \sec x \tan x\, f + \sec^2 x\, f \\ &= \sec x\, f\,(\tan x + \sec x) = \sec x\, f^2, \end{aligned}$$

又因為 $f\,f' = f \cdot \sec x\, f = \sec x\, f^2$ 亦成立，所以 $f'' = ff'$，即 $k = 1$。

此外 $[f'(x)]^2 = \sec^2 x\,[f(x)]^2$，所以

$$\sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6 = \sec^2 x\, f^2 \cdot f^4 = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

這是一般結果中 $n = 4$、$k = 1$ 的情況：

$$\begin{aligned}\int \sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^5}{5} - \frac{f^7}{35} + C = \frac{\sec x\, f^6}{5} - \frac{f^7}{35} + C \\ &= \frac{f^6}{35}(7\sec x - (\sec x + \tan x)) + C \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^6\,(6\sec x - \tan x)}{35} + C.\end{aligned}$$

驗算

- 對 (i) 的答案求導：$\sec^2 x \tan^4 x + \sec^2 x \tan^6 x = \sec^2 x \tan^4 x(1 + \tan^2 x) = \tan^4 x \sec^4 x$。
- 以數值計算，辛普森法則（Simpson's rule）給出 $\int_{-0.7}^{1.1} \sin^4 x / \cos^8 x\,\mathrm{d}x \approx 22.12954$，與 $\left[\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x\right]_{-0.7}^{1.1}$ 吻合；而 $\int_{-1}^{0.9} \sec^2 x(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x \approx 133.68566$，與 (ii) 的答案吻合。
- 對於 $f = \tan$ 及 1 至 6 的每一個 n，一般公式都與數值積分（quadrature）的結果一致。

常見錯誤

- 在分部積分中選取 $u = f^n$：這樣會產生 $f^{n-1}[f']^3$，情況只會更糟。應把一個 f' 與 f^n 配成一對，使它能恰好積出來。
- 對 $\tan x$ 取 $k = 1$：其實 $f'' = 2\sec^2 x \tan x$，所以 $k = 2$。
- 在 (ii) 中，忘記 $\sec^2 x$ 必須以 $[f']^2/f^2$ 的形式吸收進去，這正是指數由 6 降至 $n = 4$ 的原因。

STEP 之外

條件 $f'' = kff'$ 本身就是一條微分方程（differential equation）：積分一次得 $f' = \frac{1}{2}kf^2 + c$，這是一條一階可分離變數方程（separable equation），其解包括 tan（$k = 2$，$c = 1$）及 $\sec x + \tan x$（$k = 1$，$c = \frac{1}{2}$）。認識到某個被積函數之所以容易處理，是因為該函數滿足某條常微分方程（ODE），這個主題在大學一年級有關特殊函數（special functions）和遞推公式（reduction formulae）的課程中會反覆出現。Boyce 和 DiPrima

的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講解了像這樣的可分離方程和自治方程（autonomous equations）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。