詳細解答

STEP II 2011，第 5 題

純數學 • 向量與反射

> **STEP II 2011，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q5

關鍵思路

要把一點關於一條經過原點的直線作反射（reflection），可把它的位置向量（position vector）分解為沿該直線的部分和與該直線垂直的部分：反射保留前者，並把後者反向。$\mathbf{b}$ 沿 $\mathbf{a}$ 方向的分量（component）就是我們熟悉的投影（projection）$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$，其餘的都只是點積（dot product）的運算整理。至於共線（collinear）問題，記住：一點位於直線 AB 上，當且僅當它的位置向量可寫成 $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$，其中 $s+t=1$。

解答

整個解答中，$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均非零且互不平行，因為 O、A、B 不共線。特別地，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\neq 0$ 且 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\neq 0$，所以可以除以它們。記 $\theta=\angle AOB$。

反射點 C

設 P 為從 B 到直線 OA 的垂足（foot of the perpendicular）。它的位置向量是某個倍數 $k\mathbf{a}$，而 $\mathbf{b}-k\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{a}$ 垂直：

$$(\mathbf{b}-k\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

關於直線 OA 的反射保持 P 不動，並把 B 映到另一側的點 C，使 P 為 BC 的中點。所以 $\mathbf{c}=2\overrightarrow{OP}-\mathbf{b}$，即

$$\mathbf{c}=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}-\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}-\mathbf{b},\qquad \lambda=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}},$$

即為所求。

反射點 D

以直線 OB 代替 OA，同樣的論證給出

$$\mathbf{d} = \frac{2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\,\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

而 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 2\right)\mathbf{b} - (\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1\right)\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}.\end{aligned}$$

這就是 $\mathbf{d} = \mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$，其中

$$\mu = \frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1 = \frac{4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})} - 1 = 4\cos^2\theta - 1,$$

最後一步用了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$。下面需要用到的正是 $4\cos^2\theta - 1$ 這個形式。

A、B、D 共線

點 D 位於直線 AB 上，當且僅當對某個純量（scalar）t 有 $\mathbf{d} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$。另一方面，我們亦有 $\mathbf{d} = -\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$。

> ? **想一想** 為甚麼可以比較 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的係數（coefficient）？

因為 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 互不平行。若 $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = s'\mathbf{a} + t'\mathbf{b}$，則 $(s - s')\mathbf{a} = (t' - t)\mathbf{b}$；除非兩個括號都等於零，否則這會使 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行。這正是用到 O、A、B 不共線的地方。

所以 $-\lambda = 1 - t$ 且 $\mu = t$。消去 t，可知 A、B、D 共線當且僅當

$$\mu = \lambda + 1.$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ 的情況

此時共線條件給出 $\mu = \frac{1}{2}$，所以 $4\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}$，即 $\cos^2\theta = \frac{3}{8}$。由於 $\lambda < 0$，我們有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$，所以 $\cos\theta < 0$，故

$$\cos\angle AOB = -\sqrt{\tfrac{3}{8}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

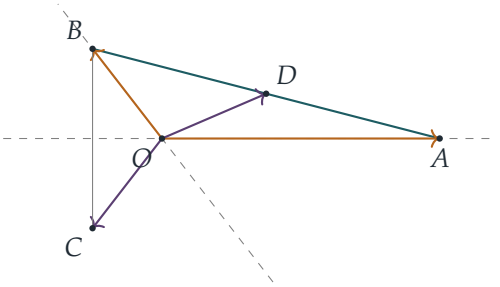
於是

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

所以 D **是** AB **的中點**。關於圖形的形狀，我們還可以說得更多。由 $\lambda = \dfrac{2|\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{a}|} = -\frac{1}{2}$，

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = -4\cos\theta = \sqrt{6},$$

所以 $OA = \sqrt{6}\,OB$，而角 AOB 是鈍角（obtuse angle）（約 127.8°）。此外，反射保持與 O 的距離不變，所以 $OD = OC = OB$：AB 的中點到 O 的距離恰好與 B 相同。



驗算

- 先關於 OA、再關於 OB 反射兩次，等同於繞 O 旋轉（rotation）2θ。所以 D 應是 B 旋轉 2θ 後的位置，且 $\cos\angle BOD = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$。在最後的情況中，這等於 $2\cdot\frac{3}{8} - 1 = -\frac{1}{4}$。直接計算，$\mathbf{b}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)|\mathbf{b}|^2 = -\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2$，其中用了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{4}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$，結果吻合。
- 若 $\theta = 90°$，則 $\lambda = 0$，C 是 $-\mathbf{b}$，而 D 亦是 $-\mathbf{b}$。公式給出 $\mu = 4\cdot 0 - 1 = -1$，與預期相符。
- 數值上，取 $\mathbf{a} = (\sqrt{6}, 0)$ 及 $\mathbf{b} = (-0.6124,\ 0.7906)$，反射兩次得 $\mathbf{d} = (0.9186,\ 0.3953)$，這正是 AB 的中點，而且 $|\mathbf{d}| = 1 = |\mathbf{b}|$。

常見錯誤

- 把反射寫成 $\mathbf{b} - 2\times$（投影）。這其實是關於與 OA 垂直的直線作反射。可用 $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ 來測試：它應保持不動。
- 取 $\cos\theta = +\sqrt{6}/4$。λ 的正負決定了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的正負。
- 比較係數時沒有說明 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 線性無關（linearly independent）。

STEP 之外

映射 $\mathbf{x} \mapsto \frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a} - \mathbf{x}$ 是一個線性映射（linear map），它的矩陣是大學一年級課程中行列式（determinant）為 -1 的正交矩陣（orthogonal matrix）的標準例子。兩次反射的複合是一個旋轉，旋轉角為兩面鏡子之間夾角的兩倍。這是研究等距變換（isometry）以及由反射生成的羣（group）——例如正多邊形的對稱羣——的起點。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對投影和反射矩陣有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。