詳細解答

STEP II 2011，第 4 題

純數學 • 三角方程

> **STEP II 2011，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q4

關鍵思路

把 $\cos\theta$ 寫成某個相關角的正弦（或餘弦），這樣「$\cos\theta = \sin 4\theta$」就變成兩個餘弦相等的方程，可以精確求解。將 $\sin 4\theta$ 展開成 $\sin\theta$ 的冪，會得到一個三次方程（cubic），其根正是這些角的正弦值，像 $\sin 18^\circ$ 這樣的根式（surd）就是這樣出現的。第 (ii) 部分是一個關於 $\sin^2 x$ 的二次方程（quadratic）；而第 (iii) 部分只要找到一個正弦平方等於 $\frac{1}{4}$ 的角，就會發現它其實是喬裝了的第 (ii) 部分。

解答

第 (i) 部分

為了把同類的東西放在一起比較，寫 $\sin 4\theta = \cos(90^\circ - 4\theta)$。兩個角的餘弦相等，當且僅當它們在相差 360° 的倍數之下相等或互為相反數，因此

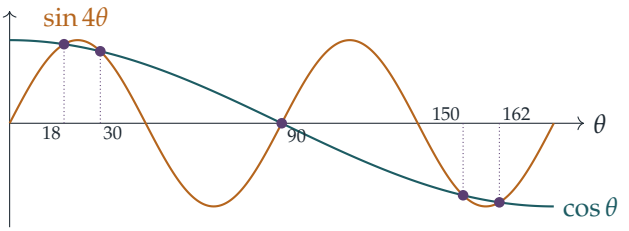
$$\cos\theta = \cos(90^\circ - 4\theta) \iff \theta = \pm(90^\circ - 4\theta) + 360^\circ k \quad \text{對某整數} k.$$

- 取 $+$ 號：$5\theta = 90^\circ + 360^\circ k$，所以 $\theta = 18^\circ + 72^\circ k$。在 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 內得 $\theta = 18^\circ, 90^\circ, 162^\circ$。
- 取 $-$ 號：$3\theta = 90^\circ - 360^\circ k$，所以 $\theta = 30^\circ - 120^\circ k$，得 $\theta = 30^\circ, 150^\circ$。

因此解為

$$\theta = 18^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 162^\circ.$$

下圖證實兩條曲線恰好相交五次。



接下來處理「由此」的部分。設 $s = \sin\theta$。兩次運用倍角公式（double-angle formulae），

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta),$$

於是方程 $\cos\theta = \sin 4\theta$ 變成

$$\cos\theta\big(1 - 4s(1 - 2s^2)\big) = 0.$$

想一想 為甚麼可以約去 $\cos\theta$？

在五個解之中，只有 $\theta = 90°$ 使 $\cos\theta = 0$。其餘四個解 $18°, 30°, 150°, 162°$ 都有 $\cos\theta \neq 0$，所以對它們可以除以 $\cos\theta$，得

$$8s^3 - 4s + 1 = 0.$$

我們知道 $s = \sin 30° = \frac{1}{2}$ 是其中一個根，因式分解（factorising）得

$$8s^3 - 4s + 1 = (2s - 1)(4s^2 + 2s - 1).$$

$\sin 18°$ 是這個三次方程的根，而由於正弦在 $[0°, 90°]$ 上遞增，$0 < \sin 18° < \sin 30° = \frac{1}{2}$。所以 $\sin 18° \neq \frac{1}{2}$，它必定是 $4s^2 + 2s - 1 = 0$ 的根，而這個方程的根為

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

只有取 $+$ 號的根是正數，所以

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

得證。

第 (ii) 部分

設 $s = \sin x$。由於 $\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x = 4s^2(1 - s^2)$，方程只取決於 s：

$$4s^2 + 1 = 16s^2(1 - s^2) \iff 16s^4 - 12s^2 + 1 = 0.$$

這是關於 s^2 的二次方程：

$$s^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

要開平方根，留意

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

s^2 的兩個值都介乎 0 與 1 之間，所以四個平方根每一個都確實是 $\sin x$ 可取的值；又因為以上每一步都可逆，它們都滿足原方程。可能的值為

$$\sin x = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}.$$

由第 (i) 部分，$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \sin 18°$；而 $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \sin 54°$（它等於 $\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18°$，你可以驗證兩者結果相同）。

第 (iii) 部分

把第 (ii) 部分的方程除以 4：

$$\sin^2 x + \tfrac{1}{4} = \sin^2 2x.$$

將它與 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha = \sin^2 6\alpha$ 比較。若設 $x = 3\alpha$，則自然有 $2x = 6\alpha$，而只要

$$\sin^2 5\alpha = \tfrac{1}{4} \qquad 及 \qquad \sin 3\alpha \text{ 是第 (ii) 部分四個值之一，}$$

兩條方程便吻合。

想一想 $\sin 3\alpha$ 是那些值之一就足夠了嗎？

足夠：在第 (ii) 部分我們看到，方程 $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin^2 2x$ 只透過 $s = \sin x$ 依賴於 x，而那四個 s 值都滿足它。所以任何正弦取這些值之一的 x 都可行。

取 $\alpha = 6°$。則 $5\alpha = 30°$，所以 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$；而 $3\alpha = 18°$，所以 $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$，正是我們的值之一。因此

$$\sin^2 18° + \sin^2 30° = \sin^2 36°,$$

$\alpha = 6°$ 是一個解。

取 $\alpha = 42°$。則 $5\alpha = 210°$，所以 $\sin 5\alpha = -\frac{1}{2}$，$\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$；而 $3\alpha = 126°$，所以 $\sin 3\alpha = \sin 54° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$，同樣是我們的值之一。所以 $\alpha = 42°$ 是一個解。

因此兩個合適的值是 $\alpha = 6°$ 和 $\alpha = 42°$。

同樣的方法亦給出 $\alpha = 66°$（$5\alpha = 330°$，$\sin 3\alpha = \sin 198° = -\sin 18°$）及 $\alpha = 78°$（$5\alpha = 390°$，$\sin 3\alpha = \sin 234° = -\sin 54°$）。範圍內另一個滿足 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ 的角是 $\alpha = 30°$，但它不成立，因為 $\sin 90° = 1$ 不是我們的值之一。（事實上 $1 + \frac{1}{4} \neq \sin^2 180° = 0$。）

驗算

▶ $\sin 18° \approx 0.30902$，而 $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.30902$。

- 對 $\alpha = 6°$：$\sin^2 18° + \sin^2 30° \approx 0.09549 + 0.25 = 0.34549$，而 $\sin^2 36° \approx 0.34549$。
- 在 $(0°, 90°)$ 上以數值方法掃描 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha - \sin^2 6\alpha$，找到的零點恰好是 $6°, 42°, 45°, 66°, 78°$。多出來的 $45°$ 並非來自第 (ii) 部分：在該處 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$。

常見錯誤

- 忘記 $\cos A = \cos B$ 的第二組解（即 $A = -B + 360°k$），因而在第 (i) 部分漏掉 $30°$ 和 $150°$。
- 不加說明就約去 $\cos\theta$。這裏這樣做沒問題，但只是因為使 $\cos\theta = 0$ 的解是 $90°$，而不是 $18°$。
- 在第 (ii) 部分只給出 $\sin x$ 的正值。四個值全部都是可能的。

STEP 之外

$\sin 18°$ 之所以有精確值，是因為 $18°$ 是直角的五分之一，因此它與正五邊形（regular pentagon）及黃金比例（golden ratio）息息相關：$\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}\varphi$。更一般地，$\cos(360°/n)$ 能只用平方根表示，當且僅當正 n 邊形可以用直尺和圓規作出（尺規作圖，ruler and compasses）；高斯（Gauss）證明了這取決於整除 n 的費馬質數（Fermat primes）。這是域論（field theory）和伽羅瓦理論（Galois theory）的經典入門應用。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）逐步建立所需的代數，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則說明為甚麼單位根（roots of unity）與多邊形密不可分。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。