詳細解答

STEP II 2011，第 3 題

純數學 • 以單調性證明不等式

> **STEP II 2011，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q3

關鍵思路

這裏每一條不等式（inequality）都源自同一個原則：如果一個函數（function）從零出發，而其導數（derivative）非負，那麼它會一直保持非負。最後兩個結果再加了一點變化。一旦知道某函數是遞增（increasing）的，我們便可以代入兩個早已知道大小次序的輸入值（例如 $x \leq \arcsin x$），從而讀出輸出值之間的不等式。看出要比較哪兩個輸入值，就是整個技巧所在。

解答

第 (i)(a) 部分

求導，並對 $x\cos x$ 使用乘積法則（product rule），

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

當 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ 時，$x \geq 0$ 及 $\sin x \geq 0$ 均成立，所以 $f'(x) \geq 0$，因此 f 在此區間上遞增。

故此，當 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ 時，我們有 $x \geq 0$，所以 $f(x) \geq f(0) = \sin 0 - 0 = 0$，得證。

第 (i)(b) 部分

設 $h(x) = \arcsin x - x$，其中 $0 \leq x < 1$。利用題目給出的事實，

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

所以 h 遞增，且 $h(x) \geq h(0) = 0$。即是說，當 $0 \leq x < 1$ 時，$\arcsin x \geq x$。

（題目給出的事實其實就是 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$，這成立是因為 $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$。）

第 (i)(c) 部分

記 $g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$。當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，由商法則（quotient rule）得

$$g'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}.$$

由 (a) 部分，此處 $f(x) \geq 0$，而 $\sin^2 x > 0$，所以 $g'(x) \geq 0$，因此 g 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增。

想一想 知道 g 是遞增的，對處理一條涉及 $\arcsin x$ 的不等式有甚麼幫助？

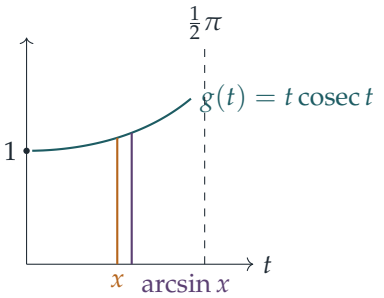
看看目標：$\dfrac{\arcsin x}{x} \geq \dfrac{x}{\sin x}$。右方是 $g(x)$。左方同樣是 g 的一個值。若 $y = \arcsin x$，則 $\sin y = x$，所以

$$g(y) = \frac{y}{\sin y} = \frac{\arcsin x}{x}.$$

因此我們需要證明 $g(\arcsin x) \geq g(x)$；由於 g 遞增，這可由 (b) 部分的 $\arcsin x \geq x$ 推出。

最後，取 $0 < x < 1$，並設 $y = \arcsin x$。於是 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$。另外 $0 < x < 1 < \frac{1}{2}\pi$，所以 x 和 y 都位於 g 遞增的區間內。由 (b) 部分，$y \geq x$，所以 $g(y) \geq g(x)$：

$$(\arcsin x)\, x^{-1} = \frac{y}{\sin y} \geq \frac{x}{\sin x} = x \operatorname{cosec} x \qquad (0 < x < 1).$$



上圖展示 $x = 0.8$ 時的論證：輸入值 $\arcsin x$ 位於 x 的右方，所以遞增曲線在那裏較高。

第 (ii) 部分

我們照搬 (i) 的模式。首先是 (b) 的類比。設 $m(x) = x - \arctan x$，其中 $x \geq 0$。由題目給出的事實，$m'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) \geq 0$，所以 $m(x) \geq m(0) = 0$。因此

$$\arctan x \leq x \qquad (x \geq 0).$$

接着是 (c) 的類比。設 $k(x) = x^{-1}\tan x$，其中 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$。則

$$k'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x},$$

這裏先將分子分母同乘以 $\cos^2 x$（它是正數），再同乘以 2。

> **想一想** 為甚麼 $2x - \sin 2x \geq 0$？

這就是熟悉的「當 $t \geq 0$ 時 $\sin t \leq t$」，取 $t = 2x$ 即可。它可以用與其他部分相同的方式證明：$p(t) = t - \sin t$ 滿足 $p'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ 及 $p(0) = 0$，所以當 $t \geq 0$ 時 $p(t) \geq 0$。

所以 $k'(x)$ 的分子非負，分母為正，從而 $k'(x) \geq 0$。因此 k 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增。

現在取 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$，並設 $y = \arctan x$。於是 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$，所以 x 和 y 都位於 k 遞增的區間內，且 $\tan y = x$。由於 $y \leq x$，我們得到 $k(y) \leq k(x)$：

$$\frac{x}{\arctan x} = \frac{\tan y}{y} \leq \frac{\tan x}{x}.$$

x 和 $\arctan x$ 都是正數，所以兩邊同乘以 $x\arctan x$ 不會改變不等號的方向：

$$(\tan x)(\arctan x) \geq x^2 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi),$$

得證。

驗算

- 在 (c) 中取 $x = \frac{1}{2}$：$\arcsin(\frac{1}{2})/\frac{1}{2} = \pi/3 \approx 1.0472$，而 $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{2} \approx 1.0429$。不等式成立，而且只是勉強成立，這正符合預期：當 $x \to 0$ 時兩邊都趨向 1。
- 在 (ii) 中取 $x = 1$：$\tan 1 \cdot \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi\tan 1 \approx 1.2232 \geq 1$。
- 當 x 很小時，$\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3$ 及 $\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3$，所以兩者之積為 $x^2 + O(x^6)$：(ii) 中的不等式在 0 附近極之緊。我們在 20,000 個隨機點作數值驗算，確認了上述每一條不等式和每一條導數公式。

常見錯誤

- 在 (c) 中比較 g 在錯誤的一對點上的值，或忘記檢查 $\arcsin x$ 是否位於已知 g 遞增的區間 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。
- 在 (ii) 中，輸入值之間的不等式方向相反（$\arctan x \leq x$），所以輸出值之間的不等式方向也相反。若把方向弄反，就會得出錯誤的不等式。
- 將不等式兩邊同乘以某數時，沒有說明該乘數（$x\arctan x$ 或 $\cos^2 x$）是正數。

STEP 之外

貫穿全題的原則——非負導數迫使函數遞增——是均值定理（mean value theorem）的推論，任何分析（analysis）入門課程都會證明這條定理。比較 $g(x)$ 與 $g(\arcsin x)$ 的技巧（其中 sin 與 arcsin 互為反函數），與你日後在反函數（inverse functions）和凸性（convexity）中會遇到的想法一脈相承。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對均值定理及其推論給出了嚴謹而易讀的證明。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。