詳細解答

# STEP II 2011，第 2 題

純數學 • 丟番圖方程

> **STEP II 2011，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q2

## 關鍵思路

每當見到 $x^3+y^3$，就應把它因式分解（factorise）：$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$。一旦 $x+y$ 被確定（在 (i) 中為 $k$，在 (ii) 中為 $z^2$），因式 $x+y$ 便可與 $kz^3$ 的一部分約去，剩下一個二次條件。對這個二次式配方（completing the square），可把它化成「某式 $=3\times$ 完全平方數（perfect square）」的形式，再利用上下界（bounds），便只剩下少數幾個立方數需要逐一嘗試。這正是題目先要求列出不超過 $10^3$ 的立方數的原因。

以供參考：$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000$。

## 解答

### 第 (i) 部分

由於 $x+y=k$，

$$kz^3=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=k(x^2-xy+y^2),$$

而 $k>0$，故 $z^3=x^2-xy+y^2$。代入 $y=k-x$：

$$\begin{aligned} z^3 &= x^2-x(k-x)+(k-x)^2 \\ &= x^2-kx+x^2+k^2-2kx+x^2 \\ &= k^2-3kx+3x^2, \end{aligned}$$

得證。

**完全平方數**。兩邊乘以 4 並配方：

$$4z^3-k^2=12x^2-12kx+3k^2=3(4x^2-4kx+k^2)=3(k-2x)^2.$$

所以 $\dfrac{4z^3-k^2}{3}=(k-2x)^2$，即整數 $k-2x$ 的平方。

**上下界**。由上式，$4z^3=k^2+3(k-2x)^2\geq k^2$，故 $\frac{1}{4}k^2\leq z^3$。至於上界，注意 $3kx-3x^2=3x(k-x)=3xy$，所以

$$z^3=k^2-3xy<k^2,$$

因為 $x$ 和 $y$ 都是正數。因此 $\frac{1}{4}k^2\leq z^3<k^2$。

**$k=20$ 的情況**。我們尋找滿足 $x+y=20$ 的解。上下界給出 $100\leq z^3<400$，從立方數列表可知 $z^3\in\{125,216,343\}$。接着檢驗 $(4z^3-400)/3$ 是否為完全平方數：

- $z=5$：$(500-400)/3=100/3$，不是整數；
- $z=6$：$(864-400)/3=464/3$，不是整數；
- $z=7$：$(1372-400)/3=324=18^2$。✓

所以在 $k=20$ 時 $(k-2x)^2=18^2$。由於 $x<y$ 意味着 $2x<x+y=k$，故 $k-2x>0$，因此 $k-2x=18$，得 $x=1$、$y=19$。驗算：$1^3+19^3=1+6859=6860=20\times343=20\times7^3$。所以

$$x=1,\quad y=19,\quad z=7$$

是 $(*)$ 在 $k=20$ 時的一個解。

### 第 (ii) 部分

現設 $x+y=z^2$。則

$$kz^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=z^2(x^2-xy+y^2),$$

兩邊除以 $z^2$（由於 $z>0$，這是容許的），得 $x^2-xy+y^2=kz$。

> ? **想一想** 怎樣才能令同樣的「完全平方」技巧在這裏奏效？

利用恆等式 $4(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2+3(x-y)^2$，這其實就是 (i) 中所得結果的另一種面貌（展開右邊即可驗證）。代入 $x+y=z^2$ 和 $k=19$，得

$$76z=z^4+3(y-x)^2,\qquad \text{即}\qquad 3(y-x)^2=z\,(76-z^3).$$

由於 $y>x$，左邊為正，故 $z^3<76$，因此 $z\in\{1,2,3,4\}$。我們需要 $z(76-z^3)/3$ 為完全平方數：

- $z=1$：$75/3=25=5^2$，所以 $y-x=5$；但 $x+y=1$，對正整數而言不可能。

- $z=2$：$2\times 68/3=136/3$，不是整數。
- $z=3$：$3\times 49/3=49=7^2$，所以 $y-x=7$ 且 $x+y=9$，得 $x=1$、$y=8$。
- $z=4$：$4\times 12/3=16=4^2$，所以 $y-x=4$ 且 $x+y=16$，得 $x=6$、$y=10$。

驗算：$1^3+8^3=513=19\times 27=19\times 3^3$，以及 $6^3+10^3=1216=19\times 64=19\times 4^3$。所以 $(*)$ 在 $k=19$ 時的兩個解為

$$(x,y,z)=(1,8,3)\quad 及\quad (x,y,z)=(6,10,4).$$

（事實上，上述論證顯示在 $x+y=z^2$ 的條件下，只有這兩個解。）

## 驗算

- 用一個簡單例子檢驗 (i) 的恆等式：$k=5$、$x=2$、$y=3$ 給出 $x^3+y^3=35=5\times 7$，而 $k^2-3kx+3x^2=25-30+12=7$。✓
- 如上文所做，把每個答案代回 $(*)$：$6860=20\times 343$、$513=19\times 27$、$1216=19\times 64$。
- 用電腦搜尋所有滿足 $x+y=20$ 的 $x<y$，以及在 $k=19$ 時所有滿足 $x+y=z^2$ 的 $x<y$，結果正好找到這些解，再無其他。

## 常見錯誤

- 忘記正負號：$(k-2x)^2=18^2$ 也容許 $k-2x=-18$，但這會給出 $x=19>y$，被條件 $x<y$ 排除。
- 在 (ii) 中把 $z=1$ 保留為解：$y-x=5$ 本身沒有問題，但它不能與 $x+y=1$ 同時成立。

## STEP 之外

像 $x^3+y^3=kz^3$ 這類方程，問的是哪些整數 $k$ 可以寫成兩個有理數（rational number）立方之和。這個問題直接通向橢圓曲線（elliptic curves），至今仍未完全解決；著名的的士數（taxicab number）$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$ 也屬於同一領域。這裏用到的技巧（因式分解、配方，再利用上下界把搜尋範圍收窄至有限）是初等數論（elementary number theory）的基本功。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是很好的下一步讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。