詳細解答

STEP II 2011，第 12 題

概率與統計 • 博弈中的等比級數

STEP II 2011，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s2-q12

關鍵思路

每局最多只有三分，所以我們可以列出一局所有可能的進程（只有八個序列），並把它們分為「Xavier 勝」、「Younis 勝」和「無人勝出，再打一局」三類。由於每一局都重新開始，整場比賽是一個幾何過程（geometric process）：Younis 贏得整場比賽的概率（probability），等於 Younis 贏得一局的概率除以一局分出勝負的概率。

解答

把每一局寫成一串得分者，例如 XYY 表示 Xavier 贏第一分，而 Younis 贏第二和第三分。第一分以概率 p 歸 X。此後，每一分以概率 p 歸於與上一分相同的球員，並以概率 $1-p$ 轉換到另一位球員。

只要同一位球員連贏兩分，該局便分出勝負，因此可能的局為：

序列	概率	結果
XX	$p \cdot p$	Xavier 勝
YXX	$(1-p)(1-p)p$	Xavier 勝
YY	$(1-p)p$	Younis 勝
XYY	$p(1-p)p$	Younis 勝
XYX	$p(1-p)(1-p)$	再打一局
YXY	$(1-p)(1-p)(1-p)$	再打一局

（一局一旦出現 XX 或 YY，便不需要第三分；我們設想第三分有沒有打，都沒有分別。）未分勝負的局，正好是得分交替出現的局，即後兩分都「轉換」。

第 (i) 部分

設 A 為 Younis 贏得某一局的事件（event），C 為該局未分勝負的事件。由上表，

$$\mathrm{P}(A) = (1-p)p + p^2(1-p) = p(1-p)(1+p) = p(1-p^2),$$
$$\mathrm{P}(C) = p(1-p)^2 + (1-p)^3 = (1-p)^2(p+(1-p)) = (1-p)^2.$$

各局在相同規則下獨立（independent）進行，所以 Younis 贏得整場比賽，當且僅當對某個 $n \geq 1$，首 $n-1$ 局都未分勝負，而 Younis 贏第 n 局。因此

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(C)^{n-1}\,\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(C)},$$

其中由於當 $p \neq 0$ 時 $\mathrm{P}(C) = (1-p)^2 < 1$，這個幾何級數（geometric series）收斂（converges）。（等價地：若第一局未分勝負，我們便回到起點，所以 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)\,w$。）而 $1-(1-p)^2 = 2p-p^2 = p(2-p)$，所以

$$w = \frac{p(1-p^2)}{p(2-p)} = \frac{1-p^2}{2-p},$$

其中約去 p 用到了 $p \neq 0$。這就是所求的結果。

與 $\frac{1}{2}$ 比較。我們有

$$w - \tfrac{1}{2} = \frac{2(1-p^2)-(2-p)}{2(2-p)} = \frac{p-2p^2}{2(2-p)} = \frac{p(1-2p)}{2(2-p)}.$$

當 $0 < p \leq 1$ 時，因子 p 和 $2-p$ 都是正數，所以 $w - \frac{1}{2}$ 與 $1-2p$ 同號。因此當 $0 < p < \frac{1}{2}$ 時 $w > \frac{1}{2}$，當 $p > \frac{1}{2}$ 時 $w < \frac{1}{2}$（而在 $p = \frac{1}{2}$ 時 $w = \frac{1}{2}$，正如對稱性所要求）。

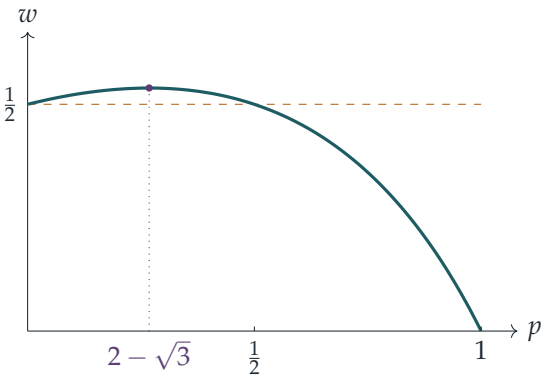
? **想一想** 降低 p 會令 Younis 更有可能贏得第一分。這是否必定對 Younis 有利？

w 是否隨 p 遞減？不是。用商法則（quotient rule）求導，

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{-2p(2-p)+(1-p^2)}{(2-p)^2} = \frac{p^2-4p+1}{(2-p)^2}.$$

分子的根為 $p = 2 \pm \sqrt{3}$，其中只有 $2-\sqrt{3} \approx 0.268$ 位於 $[0,1]$ 之內。所以當 $0 < p < 2-\sqrt{3}$ 時 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p > 0$，當 $2-\sqrt{3} < p \leq 1$ 時 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p < 0$。在區間 $0 < p < 2-\sqrt{3}$ 上，減小 p 實際上會減小 w。例如 $w(0.2) = \frac{8}{15} \approx 0.533$，但 $w(0.1) = \frac{99}{190} \approx 0.521$。

原因是 p 同時扮演兩個角色。較小的 p 讓 Younis 取得第一分，但同時也令連勝不太可能出現，因為贏得一分的球員只會以概率 p 繼續得分。當 p 極小時，得分傾向交替出現，第一分的優勢便被抵銷。最大值為 $w(2-\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3} \approx 0.536$，而當 $p \to 0$ 時 $w \to \frac{1}{2}$。



第 (ii) 部分

當 $p = \frac{2}{3}$ 時，

$$w = \frac{1 - \frac{4}{9}}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{5/9}{4/3} = \frac{5}{12}.$$

由於 $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9} < 1$，比賽以概率 1 結束，所以 Xavier 贏得比賽的概率為 $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$。Xavier 的期望收益（expected gain）為

$$\tfrac{7}{12} \times 1 - \tfrac{5}{12} \times k,$$

而當此值為零時，比賽是公平的（fair），即

$$k = \frac{7}{5}.$$

所以當 Younis 勝出時，Xavier 應付給 Younis £1.40。

第 (iii) 部分

當 $p = 0$ 時，Younis 必定贏得每一局的第一分，而之後每一分都必定由輸掉上一分的球員贏得。所以每一局都以概率 1 按 YXY 進行。沒有人能連贏兩分，比賽永不結束：兩位球員都不會勝出。

這就是第 (i) 部分排除 $p = 0$ 的原因。此時 $\mathrm{P}(A) = 0$ 且 $1 - \mathrm{P}(C) = 0$，所以公式 $w = \mathrm{P}(A)/(1 - \mathrm{P}(C))$ 變成 $0/0$。當 $p \to 0$ 時 $\frac{1-p^2}{2-p} \to \frac{1}{2}$ 這個事實，描述的是那些鄰近而最終會結束的比賽；它並不是 $p = 0$ 這個情況本身的概率。

驗算

- 當 $p = \frac{1}{2}$ 時，每一分都等於擲一枚公平的硬幣，所以 w 應為 $\frac{1}{2}$。公式給出 $\frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$。
- 當 $p = 1$ 時，Xavier 必定贏得首兩分，所以 $w = 0$。公式給出 0。

- 表中六局的概率之和為 1。
- 對全部八個得分序列作精確枚舉（p 由 0.01 至 0.99），重現了 w；而在 $p = \frac{2}{3}$ 下模擬 200 000 場比賽，Younis 勝出的比例為 41.6%，對比 $\frac{5}{12} \approx 41.7\%$。

常見錯誤

- 把轉換規則弄反。概率 p 屬於贏得上一分的球員，而不是屬於 Xavier。
- 把錯誤的乘積設為相等，得出 $k = \frac{5}{7}$。公平的意思是 $\mathrm{P}(\text{X 勝}) \times 1 = \mathrm{P}(\text{Y 勝}) \times k$，所以較不可能勝出的一方得到較大的賠付。
- 在第 (iii) 部分把 $p = 0$ 代入公式，並聲稱每位球員的概率都是 $\frac{1}{2}$，但事實上比賽永不結束。

STEP 之外

這裏的得分構成一條馬可夫鏈（Markov chain）：每一分只取決於前一分。把比賽分拆為相同而獨立的局，是更新（renewal）論證的一個例子；而方程 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)w$ 是「首步分析」（first-step analysis）最簡單的例子，這是計算馬可夫鏈中吸收概率（absorption probabilities）的標準方法。第 (iii) 部分展示了吸收失敗時的情況：鏈永遠循環下去。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）以大學一年級的程度介紹馬可夫鏈及這些方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。