詳細解答

# STEP II 2011，第 11 題

力學 • 三維空間中的平衡

> **STEP II 2011，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q11

## 關鍵思路

一切都建基於為每條繩寫出一個沿繩方向的單位向量（unit vector）。每個單位向量都可分拆為鉛垂部分和水平部分：鉛垂部分由繩與鉛垂線所成的角決定；水平部分則由 $O$ 指向繩在天花板上的端點，並由該方向與 $OA$ 所成的角決定。一旦知道三個單位向量，平衡（equilibrium）條件便只是三條純量方程，$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 各一條。

## 解答

我們把 $P$ 視為質點（particle），並把繩視為輕而不可伸長（light and inextensible），因此每條繩都以沿繩方向的力把 $P$ 拉向其固定端。取 $O$ 為原點，$\mathbf{j}$ 沿 $OA$，$\mathbf{k}$ 鉛垂向上；$\mathbf{i}$ 為水平方向，並垂直於 $OA$。

先處理三角學。由於 $\tan\theta = \sqrt{2}$，以 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 為邊的直角三角形給出

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

由於 $\tan\phi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$，兩直角邊為 $4, \sqrt{2}$，斜邊為 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$，所以

$$\sin\phi = \frac{1}{3}, \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

### 第 (i) 部分

與鉛垂線成角 $\alpha$ 的繩，其單位向量（由 $P$ 指向天花板）的鉛垂分量為 $\cos\alpha$，水平部分的長度為 $\sin\alpha$。

對於 $PB$，$\alpha = 90^\circ - \theta$，所以鉛垂分量為 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，而水平部分的長度為 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$。

水平部分沿 $OB$ 方向（因為 $O$ 在 $P$ 的正上方），與 $\mathbf{j}$ 成角 $90^\circ+\theta$。與 $\mathbf{j}$ 成角 $90^\circ+\theta$ 的水平單位向量為 $\pm\sin(90^\circ+\theta)\,\mathbf{i}+\cos(90^\circ+\theta)\,\mathbf{j}=\pm\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}$。我們選取 $\mathbf{i}$ 的指向，使 $B$ 位於 $OA$ 的負 $\mathbf{i}$ 一側；題目所要求的形式決定了這個選擇。於是沿 $PB$ 的單位向量的水平部分為

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j})=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j}\right)=-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}.$$

加上鉛垂分量，沿 $PB$ 方向的單位向量為

$$-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},$$

正如所求。（驗算：$\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=1$。）

**第 (ii) 部分**

用同樣的方法可得另外兩條繩的單位向量。

繩 $PA$：與鉛垂線成 $30^\circ$，水平部分沿 $\mathbf{j}$：

$$\mathbf{e}_A=\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}.$$

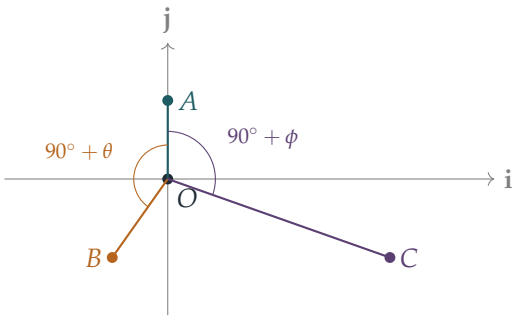
繩 $PC$：與鉛垂線成 $60^\circ$，所以鉛垂分量為 $\frac{1}{2}$，水平長度為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。方向 $OC$ 與 $\mathbf{j}$ 成角 $90^\circ+\phi$，所以其水平單位向量為 $\pm\cos\phi\,\mathbf{i}-\sin\phi\,\mathbf{j}$。

**想一想** $C$ 是在 $OA$ 與 $B$ 相同的一側，還是在相反的一側？

圖中顯示的是相反一側，而且平衡條件本身亦要求如此。$PA$ 中的張力（tension）沒有 $\mathbf{i}$ 分量，而 $PB$ 中的張力則有負分量。若 $PC$ 也有負的 $\mathbf{i}$ 分量，便沒有任何力能與它們平衡。所以符號為 $+$，且

$$\mathbf{e}_C=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{j}\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}=\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

下面的天花板平面圖（取 $OP=1$，故 $OA=\tan30^\circ$、$OB=\cot\theta$、$OC=\tan60^\circ$）顯示了各點的布局。



因此作用於 $P$ 的力為

$$\begin{aligned} \text{張力，繩}PA: &\quad T\left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{張力，繩}PB: &\quad U\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{張力，繩}PC: &\quad V\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{重量}: &\quad -W\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

**第 (iii) 部分**

$P$ 處於平衡狀態，所以四個力之和為零。我們逐一取分量。

**i**：

$$-\tfrac{1}{3}U+\tfrac{\sqrt{6}}{3}V=0 \quad\Longrightarrow\quad U=\sqrt{6}\,V,$$

正如所求。

**j**：

$$\tfrac{1}{2}T-\tfrac{\sqrt{2}}{3}U-\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=0.$$

代入 $U=\sqrt{6}V$，並利用 $\sqrt{2}\sqrt{6}=2\sqrt{3}$：

$$\tfrac{1}{2}T=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=\tfrac{5\sqrt{3}}{6}V \quad\Longrightarrow\quad T=\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V.$$

**k**：

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}T+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}U+\tfrac{1}{2}V=W.$$

代入以上兩個結果，

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}V+\tfrac{1}{2}V=\tfrac{5}{2}V+2V+\tfrac{1}{2}V=5V=W.$$

因此

$$V=\frac{W}{5},\qquad U=\frac{\sqrt{6}\,W}{5},\qquad T=\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{W}{5}=\frac{W}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,W}{3}.$$

三者皆為正，所以每條繩都是拉緊的（taut），與模型一致。

## 驗算

- 每個單位向量的長度都是 1：對於 $\mathbf{e}_C$，$\frac{6}{9}+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}=1$。
- $\mathbf{e}_A$ 與 $\mathbf{e}_C$ 的水平部分之間的夾角，其餘弦為 $-\frac{1}{3}=-\sin\phi$，所以夾角為 $90^\circ+\phi\approx 109.47^\circ$，理應如此。
- 取 $W=1$：$T\approx 0.5774$、$U\approx 0.4899$、$V=0.2$。於是鉛垂分量 $0.5774\times 0.8660+0.4899\times 0.8165+0.2\times 0.5=0.5+0.4+0.1=1$ 與重量平衡。留意這個整齊的分配：$PA$、$PB$、$PC$ 分別承受重量的 $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{10}$。

## 常見錯誤

- 處理繩 $PB$ 時混淆 sin 與 cos：它與鉛垂線所成的角是 $90^\circ - \theta$，所以其鉛垂分量為 $\sin\theta$，而不是 $\cos\theta$。
- 把 $C$ 放在 $OA$ 與 $B$ 相同的一側。這樣 **i** 方程便會迫使張力為負（即 $V = -\frac{1}{3}W$），而繩是不可能有負張力的。
- 忘記 $\cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$，以致 $\mathbf{e}_B$ 與 $\mathbf{e}_C$ 的 **j** 分量符號出錯。

## STEP 之外

三條沿三個獨立方向的繩使系統成為靜定（statically determinate）：平衡方程組成一個 $3 \times 3$ 線性方程組，並有唯一解。若再加第四條繩，單靠靜力學便不能確定各張力，工程師必須引入繩的彈性。這正是結構分析（structural analysis）以及有關秩（rank）與零空間（null space）的線性代數的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）就是以這種方式把力當作向量處理，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）則解釋這類方程組何時有唯一解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。