詳細解答

STEP II 2011，第 10 題

力學 • 拋體與衝量

STEP II 2011，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s2-q10

關鍵思路

由於 R 始終位於 P 的正下方，兩顆質點在整個過程中水平速度相同，因此弦線保持鉛垂，只需考慮鉛垂方向的運動。當 P 恰好在平面上方 $\frac{1}{2}H$ 時，弦線繃緊（taut）；此時的急拉是一個鉛垂方向的衝量（impulse），把 P 向上的動量（momentum）分給 R。此後兩顆質點速度完全相同，因此作為同一個拋射體（projectile）一起飛行，直至 R 落地。

解答

最大高度

把質點視為只受重力作用的點。速度的鉛垂分量為 $u\sin\theta - gt$，在最高點時為零。在鉛垂方向使用 $v^2 = u^2 + 2as$，末鉛垂速率為 0，

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH \qquad \Longrightarrow \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

值得記下以備後用：由此得 $u\sin\theta = \sqrt{2gH}$。

弦線何時繃緊

以 O 為原點，x 為水平方向，y 為鉛垂向上方向。質點 P 的水平速度始終為 $u\cos\theta$。要令 R 保持在 P 的正下方，R 必須以速率 $u\cos\theta$ 射出；由於平面光滑（smooth），R 便以這個恆定速率滑行。因此弦線始終鉛垂，而距離 PR 就是 P 的高度：

$$y_P = u\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gH}\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 y_P 首次達到 $\frac{1}{2}H$ 時，弦線繃緊（這必定會發生，因為 P 上升至 $H > \frac{1}{2}H$）：

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - \sqrt{2gH}\,t + \tfrac{1}{2}H = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH - gH}}{g} = (\sqrt{2} \pm 1)\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

較小的根是首次到達的時刻，因此弦線在以下時間後繃緊：

$$t_1 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{H/g},$$

正如所求。（較大的根是 P 下降時再次經過高度 $\frac{1}{2}H$ 的時刻。）

急拉

在 t_1 時，P 的鉛垂速度為

$$u\sin\theta - gt_1 = \sqrt{2gH} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{gH} = \sqrt{gH},$$

方向向上，而 R 沒有鉛垂速度。兩者的水平速度均為 $u\cos\theta$。

? **想一想** 在弦線急拉的一瞬間，有哪些衝量作用，方向如何？

弦線鉛垂，因此張力（tension）衝量 J 是鉛垂的：對 P 向下，對 R 向上。平面光滑，只能向上推 R；由於 R 被向上拉離平面，平面不施加任何衝量。所以水平速度不變，而在鉛垂方向上兩顆質點的總動量守恆。弦線不可伸長（inextensible）且保持繃緊，因此緊接急拉之後，P 和 R 有相同的鉛垂速度 w。兩者質量同為 m，

$$m\sqrt{gH} + m\cdot 0 = 2mw \qquad\Longrightarrow\qquad w = \tfrac{1}{2}\sqrt{gH}.$$

距離 D

急拉之後，若張力為零，P 和 R 速度相同，加速度亦同為向下的 g。因此它們如同兩個相同的拋射體，相隔固定距離 $\frac{1}{2}H$ 運動：弦線恰好保持繃緊而張力為零，這是自洽的。R 從高度 0 以向上速度 w 出發，因此在以下時間後回到平面：

$$t_2 = \frac{2w}{g} = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

所以 R 運動的總時間為

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{u^2\sin^2\theta}{g^2}} = \frac{u\sin\theta}{g},$$

而在整段時間內 R 以 $u\cos\theta$ 水平移動。因此

$$D = u\cos\theta\cdot\frac{u\sin\theta}{g} = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}.$$

這恰好是 P 單獨運動時射程（range）的一半：R 落地的時刻，正是沒有弦線時 P 到達其軌跡最高點的時刻。

$D = H$ 的情況

設

$$\frac{u^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

並除以 $u^2 \sin\theta/g$（它不為零，因為質點要上升，須有 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$），得 $\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$，所以

$$\tan\theta = 2.$$

驗算

- t 的兩個根之積為 H/g，之和為 $2\sqrt{2H/g}$，即 P 到達最高點再回到平面所需的時間；根據對稱性，理應如此。
- 以隨機的 u 和 θ 進行數值模擬（逐步推進 P 的飛行直至其高度為 $\frac{1}{2}H$，施加急拉，再逐步推進直至 R 落地），結果與 t_1 和 D 吻合；例如 $u = 18.11$、$\theta = 0.711$、$g = 9.8$，兩種方法均得 $D \approx 16.543$。
- 取 $\tan\theta = 2$、$u = 10$、$g = 9.8$：$D = H \approx 4.082$。

常見錯誤

- 取了較大的根 $(\sqrt{2}+1)\sqrt{H/g}$，那是 P 下降時再次經過高度 $\frac{1}{2}H$ 的時刻。
- 忘記 R 在急拉前滑行的時間 t_1，只用急拉後的飛行來計算 D。
- 在急拉時使用能量守恆：不可伸長的弦線急拉繃緊時會損失動能；只有動量守恆。

STEP 之外

急拉之後，這對質點的行為與位於其質心（centre of mass）的單一質點完全相同：內力（這裏是張力）永遠不會改變系統質心的運動。這是大學一年級課程中質點系及剛體（rigid body）力學的起點，而像這題一樣的衝擊約束亦以同樣方法處理。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這些概念有仔細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。