詳細解答

STEP II 2011，第 1 題

純數學 • 含平方根的方程

> **STEP II 2011，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q1

關鍵思路

兩部分都涉及平方根之和。只要找出定義域(domain)、端點的值和對稱性(symmetry)，這些函數的圖像便很容易理解。在第 (i) 部分，圖像給出一個不等式（inequality）：曲線永遠不會低於某個高度，而直線只能在一點達到該高度，所以根本不用解方程。在第 (ii) 部分，圖像告訴我們應該預期有多少個根，從而讓我們剔除平方時引入的多餘根。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{3+x}$。兩個平方根只有在 $1-x\geq 0$ 及 $3+x\geq 0$ 時才是實數，所以定義域為 $-3\leq x\leq 1$。在兩個端點，$f(-3)=2+0=2$ 及 $f(1)=0+2=2$。

令 $x=-1+t$，得 $f=\sqrt{2-t}+\sqrt{2+t}$。以 $-t$ 代替 t 時此式不變，所以曲線關於 $x=-1$ 對稱。求導數（derivative），

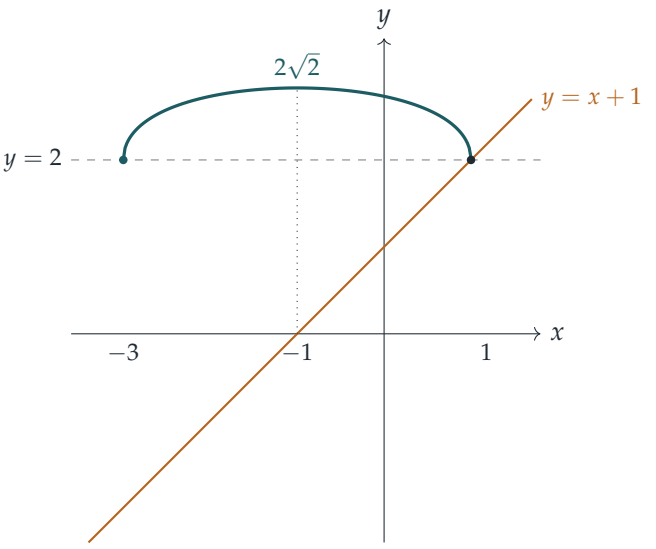
$$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{3+x}},$$

它只在 $1-x=3+x$，即 $x=-1$ 時為零，此時 $f(-1)=2\sqrt{2}$。當 $x<-1$ 時，$3+x<1-x$，所以 $f'(x)>0$；當 $x>-1$ 時，$f'(x)<0$。因此 f 由 2 上升至極大值(maximum) $2\sqrt{2}$，再回落至 2。在 $x=-3$ 附近，f' 的第二項趨於無限大，所以曲線以垂直方向離開 $(-3,2)$；同理，它亦以垂直方向到達 $(1,2)$。f 的每一項都是凹函數（concave），所以整條曲線是一頂平滑的「帽子」。

要看出最小值，更簡潔的方法是平方：

$$f(x)^2=(1-x)+(3+x)+2\sqrt{(1-x)(3+x)}=4+2\sqrt{(1-x)(3+x)}\ \geq\ 4,$$

所以在整個定義域上 $f(x) \geq 2$，等號只在 $x = -3$ 及 $x = 1$ 時成立。



現在引入直線 $y = x + 1$。在定義域上 $x \leq 1$，所以 $x + 1 \leq 2$，等號只在 $x = 1$ 時成立。另一方面 $f(x) \geq 2$。因此 $f(x) = x + 1$ 迫使兩邊都等於 2，而這只在 $x = 1$ 時發生。驗證：$\sqrt{0} + \sqrt{4} = 2 = 1 + 1$。所以恰好有一個實數值滿足方程：

$$x = 1.$$

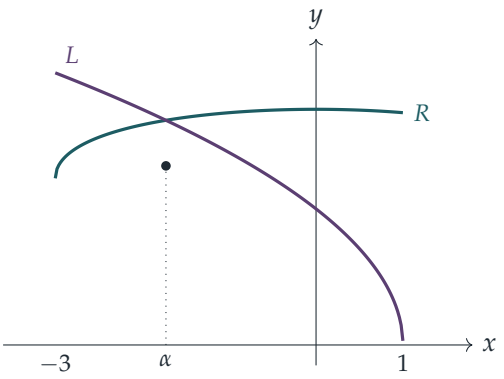
（在 $[-3, 1]$ 以外，左邊沒有定義，所以沒有其他候選值。）

第 (ii) 部分

同樣，我們需要 $x \leq 1$、$x \geq -3$ 及 $x \leq 3$，所以定義域為 $[-3, 1]$。比較

$$L(x) = 2\sqrt{1 - x} \qquad \text{和} \qquad R(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt{3 - x}.$$

L 嚴格遞減（strictly decreasing），由 $L(-3) = 4$ 降至 $L(1) = 0$。R 的形狀與第 (i) 部分的曲線相同：它關於 $x = 0$ 對稱（互換 x 與 $-x$），$R(\pm 3) = \sqrt{6}$，極大值為 $R(0) = 2\sqrt{3}$，在 $[-3, 0]$ 上遞增，在 $[0, 3]$ 上遞減。在我們的定義域上，只看到由 $x = -3$ 至 $x = 1$ 的一段，其中 $R(1) = 2 + \sqrt{2}$。



在 $x=-3$，$L=4>\sqrt{6}=R$；在 $x=0$，$L=2<2\sqrt{3}=R$。在 $[-3,0]$ 上，L 嚴格遞減而 R 遞增，所以 $L-R$ 嚴格遞減，並恰好變號一次。在 $[0,1]$ 上，$L\le 2$ 而 $R\ge 2+\sqrt{2}$，所以兩者不相交。因此方程**恰好有一個**實數解，且它位於 $-3<x<0$。

要求出這個解，就要平方。兩邊都是非負的，所以平方不會損失任何東西：

$$\begin{aligned} & 4(1-x)=(3+x)+(3-x)+2\sqrt{9-x^2} \\ \iff\quad & -1-2x=\sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

想一想 再次平方時，新方程的哪些解才是真正的解？

右邊是平方根，所以它 ≥ 0；真正的解必須滿足 $-1-2x\ge 0$，即 $x\le -\frac{1}{2}$。在這個條件下，平方是可逆的：

$$1+4x+4x^2=9-x^2 \iff 5x^2+4x-8=0 \iff x=\frac{-2\pm 2\sqrt{11}}{5}.$$

根 $\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}\approx 0.93$ 違反 $x\le -\frac{1}{2}$，所以我們捨去它。另一個根 $\frac{-2-2\sqrt{11}}{5}\approx -1.73$ 滿足條件，並位於 $[-3,0]$ 內，正如圖像所預測。所以唯一解是

$$x=-\frac{2+2\sqrt{11}}{5}.$$

驗算

- 在 $x\approx -1.72665$：$2\sqrt{1-x}\approx 3.3025$，而 $\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}\approx 1.1284+2.1741\approx 3.3025$。兩邊相符。
- 被捨去的根 $x\approx 0.92665$ 給出 $L\approx 0.542$，但 $R\approx 3.42$。它其實是 $\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{1-x}$ 的解，而這條方程平方後得出同一結果。
- 在第 (i) 部分，$f(-1)=2\sqrt{2}\approx 2.83>0=(-1)+1$，與直線除了在 $(1,2)$ 外處處位於曲線下方一致。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分用平方和代數方法硬解。這既繁複，又可能引入增根（extraneous root），而界 $f \geq 2 \geq x+1$ 卻能立即解決問題。
- 保留 $5x^2+4x-8=0$ 的兩個根。每一步平方都需要附帶其符號條件，這裏是 $-1-2x \geq 0$。
- 忘記定義域：對於 $x>1$，兩條方程都沒有意義。

STEP 之外

第 (i) 部分是分析（analysis）中一個常見技巧的小例子：與其解 $f(x)=g(x)$，不如證明 $f \geq c \geq g$，再看等號何時成立。第 (ii) 部分在求出任何根之前，就結合介值定理（intermediate value theorem）與單調性（monotonicity）來數算根的個數，這正是大學第一門分析課程中證明存在性與唯一性（existence and uniqueness）的方法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對連續性（continuity）與介值定理有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。