詳細解答

STEP I 2011，第 9 題

力學 • 拋體運動

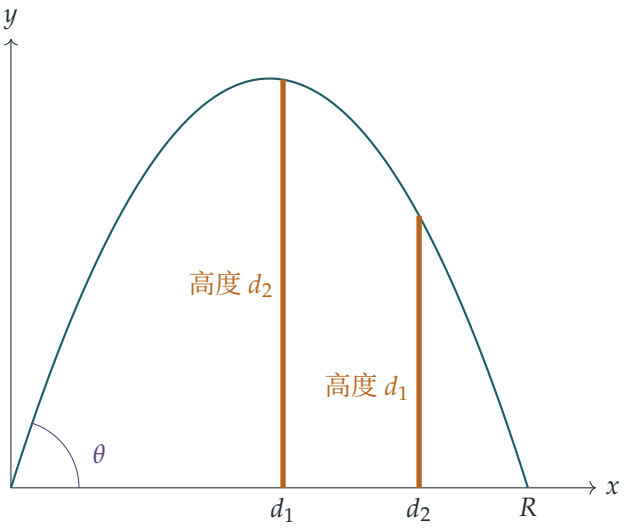
> **STEP I 2011，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q9

關鍵思路

把軌跡（trajectory）寫成單一方程 $y = x\tan\theta - ax^2$，其中常數 a 把 g、速率和角度合併在一起。「剛好越過」一幅牆，意思是路徑經過牆頂的角位，所以每幅牆都給出一條關於兩個未知數 $\tan\theta$ 和 a 的線性方程（linear equation）。解這對方程便得出角度，而射程（range）就只是 $y = 0$ 的另一個根（root）。

解答

我們把質點模型化為只受重力作用而運動的一點（不計空氣阻力（air resistance）），從原點 O 以速率 u、仰角 θ 拋出，x 為水平方向，y 為豎直向上方向。兩幅牆的高度不同，因此我們假設 $d_1 \neq d_2$。



（圖中採用 $d_1 < d_2$；但代數推導並不依賴哪一個較大。）

軌跡

在時間 t 時，$x = ut\cos\theta$ 及 $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$。消去 $t = x/(u\cos\theta)$，得

$$y = x\tan\theta - ax^2, \qquad \text{其中} a = \frac{g}{2u^2\cos^2\theta} > 0.$$

設 $T = \tan\theta$。質點剛好越過每幅牆，所以它經過牆頂 (d_1, d_2) 和 (d_2, d_1)：

$$d_2 = d_1 T - ad_1^2, \tag{1}$$
$$d_1 = d_2 T - ad_2^2. \tag{2}$$

求 $\tan\theta$

為了消去 a，把 (1) 乘以 d_2^2，把 (2) 乘以 d_1^2，使兩條式中的 a 項都是 $ad_1^2d_2^2$：

$$d_2^3 = d_1d_2^2\,T - ad_1^2d_2^2,$$
$$d_1^3 = d_1^2d_2\,T - ad_1^2d_2^2.$$

相減，得

$$d_2^3 - d_1^3 = d_1d_2(d_2 - d_1)\,T.$$

? **想一想** 我們可以除以 $d_2 - d_1$ 嗎？

可以：兩幅牆的高度 d_2 和 d_1 不同，所以 $d_1 \neq d_2$。（若兩者相等，就只有一幅牆，而單一個點無法同時確定 θ 和 u。）由於 $d_2^3 - d_1^3 = (d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1d_2 + d_1^2)$，除以 $d_1d_2(d_2 -$

d_1) 便得

$$\tan\theta = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2},$$

此即所求。

射程

質點落地之處滿足 $y = 0$ 且 $x \neq 0$，即 $x = T/a$。因此我們也需要求出 a。把 (1) 除以 d_1，(2) 除以 d_2，得

$$\frac{d_2}{d_1} = T - ad_1, \qquad \frac{d_1}{d_2} = T - ad_2.$$

以第二式減第一式，消去 T：

$$a(d_2 - d_1) = \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{(d_2 - d_1)(d_2 + d_1)}{d_1 d_2}, \qquad \text{所以} \qquad a = \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2},$$

這裏同樣用到 $d_1 \neq d_2$。因此射程為

$$R = \frac{T}{a} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2} \cdot \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 + d_2}.$$

作為合理性檢查，$R - d_2 = \dfrac{d_1^2}{d_1 + d_2} > 0$，同理 $R - d_1 = \dfrac{d_2^2}{d_1 + d_2} > 0$，所以質點落在兩幅牆之外，這是必然的。

> ? **想一想** g 和 u 到哪裏去了？

它們始終只透過單一組合 a 出現，而兩幅牆完全確定了 a：$u^2 = g/(2a\cos^2\theta)$。所以兩幅牆決定了整條軌跡，而射程只取決於 d_1 和 d_2。

驗算

- 對稱性（symmetry）：互換 d_1 和 d_2 只是把兩幅牆對調，而兩個答案關於 d_1, d_2 都是對稱的。
- 代入數值：取 $d_1 = 2$、$d_2 = 3$，得 $\tan\theta = \frac{19}{6}$、$a = \frac{5}{6}$ 及 $R = \frac{19}{5}$。於是 $y(2) = \frac{19}{3} - \frac{10}{3} = 3$，$y(3) = \frac{19}{2} - \frac{15}{2} = 2$，符合要求。以 $g = 9.8$ 對運動作數值逐步模擬，同樣落在 $x = 3.8$。
- 由於 $d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1 d_2$，得 $\tan\theta \geq 3$，所以拋射角總是很陡（至少約 71.6°）。這是合理的：要先越過較高的牆，然後這麼快就降到較矮的牆，路徑必須是一道窄拱。

常見錯誤

- 混淆哪幅牆有哪個高度：距離為 d_1 的牆，高度是 d_2。

- 把 a 寫成含 $\cos\theta$ 而非 $\cos^2\theta$，或沒有把 a 當作單一未知數處理，結果留下一個關於 u 和 θ 的混亂方程組。
- 除以 $d_2 - d_1$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

這裏的技巧在於：一個帶有兩個自由參數（parameter）（此處為 $\tan\theta$ 和 a）的曲線族，可由它必須經過的兩個點確定下來，這是插值（interpolation）的一個小例子。選取適當的未知數組合這個想法貫穿整個力學，例如求所有以固定拋射速率發射的軌跡的「包絡線」（envelope）（即安全拋物線（parabola of safety））。如想學習更多大學一年級程度的拋射體及質點力學，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。