詳細解答

STEP I 2011，第 8 題

純數學 • 丟番圖方程

> **STEP I 2011，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q8

關鍵思路

立方函數是嚴格遞增（strictly increasing）的，所以比較 m^3 與 n^3 及 $(n+1)^3$，等同於比較 m 與 n 及 $n+1$。若 m 嚴格位於兩個連續整數（consecutive integers）之間，它就不可能是整數。這樣便只剩下少數幾個 n 值需要逐一驗證。第 (ii) 部分則把同樣的夾逼（squeeze）方法用於一條新的方程。

解答

全題均利用 $x \mapsto x^3$ 在整個 $\mathbb{R}$ 上嚴格遞增這一事實，故對實數 a, b，

$$a < b \iff a^3 < b^3.$$

第 (i)(a) 部分

由 $(*)$ 得

$$m^3 - n^3 = n^2 + 1 > 0,$$

因為 $n^2 \geq 0$。所以 $m^3 > n^3$，因此 $m > n$。

其次，$m < n+1$ 當且僅當 $m^3 < (n+1)^3$。利用 $(*)$ 並展開，

$$\begin{aligned} m^3 < (n+1)^3 &\iff n^3 + n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\iff 0 < 2n^2 + 3n, \end{aligned}$$

這正是所要求的等價關係。每一步都是可逆的，所以「當且僅當」成立。

現在 $2n^2 + 3n = n(2n+3)$。這是一個二次式（quadratic），其根為 $n = -\frac{3}{2}$ 及 $n = 0$，且首項係數（leading coefficient）為正，所以它恰好在 $n < -\frac{3}{2}$ 或 $n > 0$ 時為正。對任

何這樣的 n，我們同時有 $m > n$ 及 $m < n+1$。因此

$$n < m < n+1 \quad \text{除非} \quad -\tfrac{3}{2} \le n \le 0.$$

第 (i)(b) 部分

設 m 和 n 是滿足 $(*)$ 的整數。若 $n < -\frac{3}{2}$ 或 $n > 0$，則由 (a) 部分得 $n < m < n+1$。連續整數 n 與 $n+1$ 之間嚴格來說沒有任何整數，所以這是不可能的。

? **想一想** (a) 部分對所有實數 n 都成立。那麼「是整數」這個條件在哪裏用上？

它用上了兩次。一是如上所述，排除區間以外的所有 n；二是把區間 $-\frac{3}{2} \le n \le 0$ 縮減為 $n \in \{-1, 0\}$。我們逐一驗證這兩個值：

- $n = 0$：$m^3 = 0+0+1 = 1$，所以 $m = 1$。
- $n = -1$：$m^3 = -1+1+1 = 1$，所以 $m = 1$。

兩者都給出整數 m。所以唯一的整數解是 $(m, n) = (1, 0)$ 及 $(1, -1)$，得證。

第 (ii) 部分

我們仿照第 (i) 部分的做法。首先比較 p 與 q：

$$p^3 - q^3 = 2q^2 - 1,$$

只要 $q^2 > \frac{1}{2}$，即對每個整數 $q \neq 0$，此式皆為正。對這些 q，我們有 $p > q$。

其次比較 p 與 $q+1$：

$$\begin{aligned} p^3 < (q+1)^3 &\iff q^3 + 2q^2 - 1 < q^3 + 3q^2 + 3q + 1 \\ &\iff 0 < q^2 + 3q + 2 = (q+1)(q+2). \end{aligned}$$

此式恰好在 $q > -1$ 或 $q < -2$ 時成立。

把兩者結合起來。若 q 是整數，且 $q \neq 0$、$q \neq -1$ 及 $q \neq -2$，則 $q < p < q+1$，所以 p 不可能是整數。（若 $q \ge 1$ 或 $q \le -3$，兩個條件均成立。）剩下 $q \in \{-2, -1, 0\}$：

- $q = 0$：$p^3 = -1$，所以 $p = -1$。
- $q = -1$：$p^3 = -1+2-1 = 0$，所以 $p = 0$。
- $q = -2$：$p^3 = -8+8-1 = -1$，所以 $p = -1$。

三者都給出整數 p，所以整數解為

$$(p, q) = (-1, 0), \quad (0, -1), \quad (-1, -2).$$

驗算

把每個答案代回原式。例如，$(-1)^3 = -1 = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1$。用電腦搜尋所有 $|n|, |q| < 10^5$ 的整數，恰好找到 $(*)$ 的兩個解及第 (ii) 部分的三個解，再無其他。你也可以用數值方法測試夾逼的結果。當 $n = 5$ 時，$m = \sqrt[3]{151} \approx 5.32$，嚴格位於 5 與 6 之間。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分遺漏 $q = 0$。此時 $p^3 - q^3 = -1 < 0$，所以下界 $p > q$ 不成立，這個情況需要另行驗證。
- 寫「$m^3 > n^3$，所以 $m > n$」而不給理由。這是成立的，因為立方運算是嚴格遞增的（而平方運算對負數則不然），這一點值得寫明。
- 只寫到 $n < m < n + 1$ 便停下，沒有說明為何這意味着 m 不是整數。

STEP 之外

像 $y^3 = f(x)$ 這類求整數點的方程稱為*丟番圖方程*（Diophantine equations）。把未知數夾在相鄰的冪之間，是處理這類方程的標準 first 步。較難的版本，例如 $y^2 = x^3 + k$，會引出橢圓曲線（elliptic curves）以及 Baker 的對數線性型（linear forms in logarithms）理論。這些都是深奧的領域，但仍有不少情況可以用這種初等的估界方法解決。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是初等數論（number theory）的一本好入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。