詳細解答

STEP I 2011，第 7 題

純數學 • 可分離變量微分方程

STEP I 2011，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s1-q7

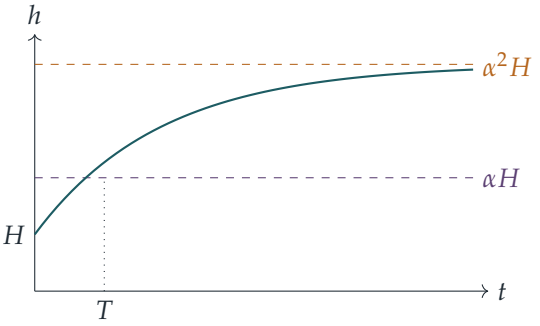
關鍵思路

體積等於（固定的截面面積）× 高度，所以高度的變化率就是（流入率 − 流出率）除以面積。題目中「高度保持不變」一句是確定流入率的線索：在那個高度，流入與流出恰好平衡。之後每一部分都是一條可分離變量（separable）的微分方程（differential equation）；而在第 (ii) 部分，代換（substitution）$u = \sqrt{h}$ 會把積分化為常規的計算。

解答

設固定的截面面積（cross-sectional area）為 A，固定的流入率為 q（單位時間內的體積）。水的體積為 Ah，所以

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - (\text{流出率}).$$



高度從 H 開始上升，趨向流入與流出平衡的水平 $\alpha^2 H$，愈來愈接近卻永遠不會到達；問題是要多久才升到 αH，由於 $1 < \alpha < \alpha^2$，這個高度位於兩者之間。（圖中所示為第 (i) 部分的情況。）

第 (i) 部分

流出率為 λh，其中 $\lambda > 0$ 為某常數，所以

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - \lambda h.$$

當 $h = \alpha^2 H$ 時高度保持不變，所以在該處 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$，得 $q = \lambda\alpha^2 H$。代入後得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{A}\left(\alpha^2 H - h\right) = k\left(\alpha^2 H - h\right), \qquad k = \frac{\lambda}{A} > 0,$$

此即所求。

由於在整個上升過程中 $H \le h < \alpha^2 H$，所以 $\alpha^2 H - h > 0$，我們可以分離變量：

$$\begin{aligned} kT &= \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha^2 H - h} = \Big[-\ln\left(\alpha^2 H - h\right) \Big]_H^{\alpha H} = \ln\frac{\alpha^2 H - H}{\alpha^2 H - \alpha H} \\ &= \ln\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha} = \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

其中因為 $\alpha > 1$，所以可約去 $\alpha - 1 \neq 0$。這就是所求的結果。

當 α 很大時，$x = 1/\alpha$ 很小，所以

$$kT \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \approx \frac{1}{\alpha},$$

因為當 α 很大時，第二項相對於第一項可以忽略。

第 (ii) 部分

現在流出率為 $\mu\sqrt{h}$，其中 $\mu > 0$ 為某常數，所以 $A\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = q - \mu\sqrt{h}$。高度在 $h = \alpha^2 H$ 時保持不變，所以 $q = \mu\sqrt{\alpha^2 H} = \mu\alpha\sqrt{H}$（利用了 $\alpha > 0$）。因此

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c\left(\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}\right), \qquad c = \frac{\mu}{A} > 0.$$

同樣，當 $h < \alpha^2 H$ 時括號內的值為正，所以

$$cT' = \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}}.$$

想一想 分母中的 $\sqrt{h}$ 該如何處理？

代換 $u = \sqrt{h}$，於是 $h = u^2$ 及 $\mathrm{d}h = 2u\,\mathrm{d}u$；積分上下限變為 $u = \sqrt{H}$ 和 $u = \sqrt{\alpha H}$。為簡便起見記 $a = \alpha\sqrt{H}$，被積函數便是一個有理函數（rational function），作除法後得

$$\frac{2u}{a-u} = -2 + \frac{2a}{a-u}.$$

因此

$$\begin{aligned} cT' &= \int_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \left(-2 + \frac{2a}{a-u}\right) \mathrm{d}u = \Big[-2u - 2a\ln(a-u)\Big]_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \\ &= -2\left(\sqrt{\alpha H} - \sqrt{H}\right) + 2a\sqrt{H}\,\ln\frac{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{H}}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}\sqrt{H}} \\ &= 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

由於 $u \le \sqrt{\alpha H} < \alpha\sqrt{H} = a$（因為當 $\alpha > 1$ 時 $\sqrt{\alpha} < \alpha$），對數內的量都是正數。最後，因式分解 $\alpha - 1 = (\sqrt{\alpha}-1)(\sqrt{\alpha}+1)$ 及 $\alpha - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-1)$，得

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

所以

$$cT' = 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

此即所求。

當 α 很大時，$1/\sqrt{\alpha}$ 很小，所以

$$\alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \approx \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2\alpha}\right) = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

兩個大項 $\pm\sqrt{\alpha}$ 互相抵消，剩下

$$cT' \approx 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{H}.$$

留意這裏我們需要用到對數展開中的 x^2 項：若只用 $\ln(1+x) \approx x$，括號內的值會是 1，於是得到 $2\sqrt{H}$，這是錯的。這正是題目給出兩項近似式的原因。

驗算

- 當 $\alpha \to 1^+$ 時，(i) 給出 $kT \to \ln 2$，而不是 0。這是對的：與平衡點（equilibrium）的差距起初為 $(\alpha^2-1)H \approx 2(\alpha-1)H$，而須縮小至 $(\alpha^2-\alpha)H \approx (\alpha-1)H$，即差距減半；而以速率 k 進行的指數衰減（exponential decay）減半所需時間為 $(\ln 2)/k$。在 (ii) 中，$cT' \to 2\sqrt{H}\ln 2$，這與在 $h = H$ 附近把 $\sqrt{h}$ 線性化（linearising）所得的等效速率 $c/(2\sqrt{H})$ 下同樣的減半相吻合。
- 取 $\alpha = 4$ 及 $H = 1$：$kT = \ln 1.25 \approx 0.2231$，$cT' = 2(-1 + 4\ln 1.5) \approx 1.2437$。對多組隨機的 H, α, k, c 用數值方法（龍格－庫塔法（Runge–Kutta））逐步求解兩條微分方程，結果與兩條公式吻合至 10^{-9}。
- 取 $\alpha = 10^4$、$H = 2$：$\alpha\ln(1 + 1/\alpha) \approx 0.99995$，$cT'/\sqrt{H} \approx 1.0066$，與極限值一致（下一項給出 $cT' \approx \sqrt{H}\,(1 + \frac{2}{3\sqrt{\alpha}})$）。

常見錯誤

- 忘記利用平衡條件消去流入率，結果剩下太多常數。
- 在第 (ii) 部分只用 $\ln(1+x) \approx x$，因而丟失了關鍵的 $-\frac{1}{2}$。
- 把 $\sqrt{\alpha^2 H}$ 寫成 $\alpha^2\sqrt{H}$。

STEP 之外

兩個模型都是一階自治微分方程（first-order autonomous differential equation）$\dot{h} = f(h)$，並在 $h = \alpha^2 H$ 處有一個穩定平衡點；線性的情況其實就是換了包裝的牛頓冷卻定律（Newton's law of cooling），而 $\sqrt{h}$ 的情況則是描述液體從小孔流出的托里拆利定律（Torricelli's law）。不必明確求解而去研究平衡點及其穩定性，正是常微分方程（ODE）定性理論（qualitative theory）的起點。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在前幾章便討論了自治方程和水箱混合模型。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。