詳細解答

STEP I 2011，第 6 題

純數學 • 二項式級數求和

> **STEP I 2011，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q6

關鍵思路

只要知道 $(1-x)^{-3}$ 的係數（coefficients），再乘上一個多項式（polynomial），其實只是把幾個相鄰的係數混合起來，所以較複雜的有理函數（rational function）的係數幾乎可以不費吹灰之力得出。把這個過程倒過來看，一個各項為 (多項式，自變數為r) $\times\, x^r$ 的級數（series），只要看出是哪一個有理函數生成它，再代入適當的 x 值（這裏是 $x=\frac{1}{2}$），便可求和。

解答

開首的結果

當 $|x|<1$ 時，指數（index）為 -3 的二項式展開（binomial expansion）給出

$$(1-x)^{-3}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r.$$

分子共有 r 個因子，每個都是負數，所以它們的積是 $(-1)^r\,\dfrac{(r+2)!}{2!}$，而這個 $(-1)^r$ 與 $(-x)^r$ 中的 $(-1)^r$ 互相抵消。因此 x^r 的係數是

$$a_r=\frac{(r+2)!}{2!\,r!}=\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2),$$

正如所求。（所以 $a_0=1$、$a_1=3$、$a_2=6$、$a_3=10$、...）

第 (i) 部分

寫成

$$\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^3} = (1-x+2x^2)\sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

x^r 項來自 $1\cdot a_r x^r$、$-x\cdot a_{r-1}x^{r-1}$ 及 $2x^2\cdot a_{r-2}x^{r-2}$，所以當 $r\geq 2$ 時，x^r 的係數是

$$\begin{aligned} a_r - a_{r-1} + 2a_{r-2} &= \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) - \tfrac{1}{2}r(r+1) + (r-1)r \\ &= (r+1) + r^2 - r \\ &= r^2 + 1. \end{aligned}$$

想一想 當 $r=0$ 及 $r=1$ 時，a_{r-1} 或 a_{r-2} 並不存在，這條公式是否仍然成立？

成立。若設 $a_{-1} = a_{-2} = 0$，公式 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ 在 $r=-1$ 及 $r=-2$ 時亦給出 0，所以上面的計算對所有 $r\geq 0$ 都成立。直接驗證：常數項是 $a_0 = 1 = 0^2+1$，而 x 的係數是 $a_1 - a_0 = 2 = 1^2+1$。所以對所有 $r\geq 0$，x^r 的係數都是 r^2+1，正如所求。

至於該級數，分子 $1,2,5,10,17,26,37,50,\ldots$ 是 $r=0,1,2,\ldots$ 時的 r^2+1，而分母是 2^r。所以該級數是

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r^2+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^r,$$

即上述展開式在 $x=\frac{1}{2}$ 時的值。這樣做是合理的，因為 $(1-x)^{-3}$ 的二項式展開在 $|x|<1$ 時收斂（converges）。因此

$$1+\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{10}{8}+\cdots = \frac{1-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

第 (ii) 部分

首要任務是找出規律。把各項改寫成分母為 $1,2,4,8,16,32,64$：

$$1, \frac{4}{2}, \frac{9}{4}, \frac{16}{8}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}, \frac{49}{64}, \cdots$$

所以該級數是 $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+1)^2}{2^r}$。

想一想 $(1-x)^3$ 上面放甚麼分子，才會得出係數 $(r+1)^2$？

第 (i) 部分提示我們試用分子 $1+x$（同樣是一個簡短的多項式）。$(1+x)(1-x)^{-3}$ 中 x^r 的係數是

$$a_r + a_{r-1} = \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) + \tfrac{1}{2}r(r+1) = \tfrac{1}{2}(r+1)(2r+2) = (r+1)^2,$$

對所有 $r \geq 0$ 均成立（與之前一樣取 $a_{-1} = 0$）。代入 $x = \frac{1}{2}$，

$$1 + 2 + \frac{9}{4} + 2 + \frac{25}{16} + \cdots = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12.$$

另一方法：利用第 (i) 部分。以 $s = r + 1$ 平移下標，使得 $2^{-r} = 2 \cdot 2^{-s}$：

$$\sum_{r \geq 0} \frac{(r+1)^2}{2^r} = 2 \sum_{s \geq 1} \frac{s^2}{2^s} = 2 \left(\sum_{s \geq 0} \frac{s^2 + 1}{2^s} - \sum_{s \geq 0} \frac{1}{2^s} \right) = 2(8 - 2) = 12,$$

這裏用了第 (i) 部分的答案及幾何級數（geometric series）$\sum 2^{-s} = 2$。

驗算

- 以人手把 $(1 - x)^{-3}$ 展開為 $(1 + x + x^2 + \cdots)^3$，或把頭幾項乘開，得到 $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$，與 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ 吻合。
- 第 (i) 部分級數的部分和（partial sums）趨近 8：取 200 項後，和與 8 在機器精度內一致。第 (ii) 部分同樣如此，極限為 12。
- 第 (ii) 部分的兩個方法得出相同答案 12。

常見錯誤

- 二項式係數的正負號弄錯：$(-3)(-4)\cdots$ 中有 r 個負號，$(-x)^r$ 中亦有 r 個，兩者互相抵消。
- 在第 (ii) 部分，因為部分分數已約至最簡而看錯規律：$2 = \frac{4}{2} = \frac{16}{8}$，以及 $\frac{9}{8} = \frac{36}{32}$。
- 代入 $x = \frac{1}{2}$ 時沒有指出展開式在該處收斂（$|x| < 1$）。

STEP 之外

我們一直在做的，其實是運用*生成函數*（*generating functions*）：把數列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ 編碼成冪級數（power series）$\sum c_r x^r$，於是對數列的運算便變成對函數的代數運算。事實上，任何「r 的多項式乘以 x^r」之和，都是一個分母為 $(1 - x)$ 的冪的有理函數，這就是為何這類和總是得出有理數。要證明代入某個 x 值是合理的，需要依靠冪級數及其收斂半徑（radius of convergence）的理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；至於把生成函數作為解題工具，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。