詳細解答

STEP I 2011，第 5 題

純數學 • 含絕對值的積分

STEP I 2011，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s1-q5

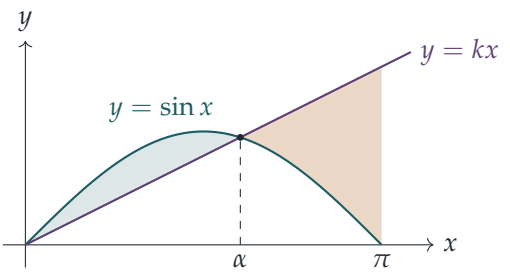
關鍵思路

只要知道 $\sin x - kx$ 在哪裏變號，絕對值符號（modulus）就不再麻煩，而草圖正告訴我們：只變號一次，就在 $x = \alpha$ 處。在該處把積分拆開，絕對值符號便會消失。最後一步是不再把 k 看作變量：由於 $k = \sin\alpha/\alpha$，所有東西都可以用 α 表示，而 I 的導數（derivative）便能整齊地因式分解。

解答

唯一的根

設 $g(x) = \sin x - kx$。直線 $y = kx$ 經過原點，斜率為 $k < 1$；而 $y = \sin x$ 離開原點時的斜率為 $\cos 0 = 1$。因此在 0 的右邊附近，正弦曲線位於直線之上。在 $x = \pi$ 處，正弦曲線回到 0，但直線的高度為 $k\pi > 0$，所以在那裏直線位於上方。由於 $y = \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 上向下彎曲，而直線是直的，兩者在其間恰好相交一次。



要令「恰好一次」無懈可擊：$g(0) = 0$、$g'(x) = \cos x - k$，而且在 $(0, \pi)$ 上 $g''(x) = -\sin x < 0$。所以 g' 嚴格遞減（strictly decreasing），由 0 處的 $1 - k > 0$ 減至 π 處的

$-1-k<0$，並恰好在一點 β 等於零。因此 g 在 $(0,\beta]$ 上嚴格遞增，故在該處為正（因為它由 0 開始），並在 $[\beta,\pi)$ 上嚴格遞減，由正值減至 $g(\pi)=-k\pi<0$。所以它在 $(0,\pi)$ 中恰有一個零點 α，而且

$$\sin x > kx \text{ 當} 0<x<\alpha, \qquad \sin x < kx \text{ 當} \alpha<x<\pi.$$

計算 I

利用這些正負號（即草圖中的藍綠色和琥珀色區域），

$$I=\int_0^{\alpha}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x-kx$ 的一個原函數（antiderivative）是 $F(x)=-\cos x-\frac{1}{2}kx^2$，所以

$$\begin{aligned} I&=(F(\alpha)-F(0))-(F(\pi)-F(\alpha))=2F(\alpha)-F(0)-F(\pi)\\ &=(-2\cos\alpha-k\alpha^2)+1-(1-\tfrac{1}{2}k\pi^2)\\ &=\tfrac{1}{2}k\pi^2-2\cos\alpha-k\alpha^2. \end{aligned}$$

由於 α 滿足 $(*)$，$k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$，所以 $k\alpha^2=\alpha\sin\alpha$，而且

$$I=\frac{\pi^2\sin\alpha}{2\alpha}-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha,$$

即為所求。

駐值（stationary value）

想一想 α 可以取甚麼值？

每個 $k\in(0,1)$ 都給出一個 $\alpha\in(0,\pi)$。反過來，每個 $\alpha\in(0,\pi)$ 都來自 $k=\sin\alpha/\alpha$，而它位於 $(0,1)$ 之中，因為在該範圍內 $0<\sin\alpha<\alpha$。因此我們必須研究 $I(\alpha)$ 在開區間 $(0,\pi)$ 內所有 α 的情況。

對第一項使用商法則（quotient rule）求導，得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}&=\frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}+2\sin\alpha-(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)\\ &=\frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}-(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &=(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{\pi^2}{2\alpha^2}-1\right). \end{aligned}$$

第一個因子在 $(0,\pi)$ 上永不為零。設 $h(\alpha)=\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$。那麼 $h(0)=0$，而且在 $(0,\pi)$ 上 $h'(\alpha)=\cos\alpha-\alpha\sin\alpha-\cos\alpha=-\alpha\sin\alpha<0$，所以在整個區間上 $h(\alpha)<0$。（等價地，在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上 $\tan\alpha>\alpha$，而在此之後 $\cos\alpha\le 0$。）

所以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ 當且僅當 $\pi^2 = 2\alpha^2$，即在 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ 處，而它確實位於 $(0, \pi)$ 之中。這是唯一的駐值。由於 $h < 0$，$\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha$ 的正負號與 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} - 1$ 的正負號相反：

- 當 $0 < \alpha < \pi/\sqrt{2}$ 時，$\frac{\pi^2}{2\alpha^2} > 1$，所以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha < 0$；
- 當 $\pi/\sqrt{2} < \alpha < \pi$ 時，$\frac{\pi^2}{2\alpha^2} < 1$，所以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha > 0$。

所以 I 先減後增：該駐值是極小值，而由於它是區間上唯一的駐點，它就是 I 的最小值。

當 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ 時，我們有 $\dfrac{\pi^2}{2\alpha} = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{2}\,\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \alpha$，所以 I 的第一項與第三項互相抵消：

$$I_{\min} = \alpha \sin\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha = -2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

這個值是正數，理應如此，因為 $\pi/\sqrt{2} \approx 2.22$ 位於 $\frac{1}{2}\pi$ 與 π 之間，而餘弦在該範圍內為負。

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，$\alpha \to \pi$，公式給出 $I \to 2$，這正是 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$。當 $k \to 1$ 時，$\alpha \to 0$，而 $I \to \frac{1}{2}\pi^2 - 2$，這正是 $\int_0^\pi (x - \sin x)\,\mathrm{d}x$。
- 數值上，$-2\cos(\pi/\sqrt{2}) \approx 1.2114$，比兩個端值 2 和 $\frac{1}{2}\pi^2 - 2 \approx 2.935$ 都小。直接以中點法數值積分（midpoint quadrature）計算 $\int_0^\pi |\sin x - kx|\,\mathrm{d}x$，取 $k = \sin\alpha/\alpha \approx 0.3582$，同樣得到 1.2114。

常見錯誤

- 對 α 求導時把 k 當作常數：k 依賴於 α，這正是我們要先代入 $k = \sin\alpha/\alpha$ 的原因。
- 只證明了 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ 僅在 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ 處成立，卻忘記證明 $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$ 在 $(0, \pi)$ 中沒有零點。

STEP 之外

唯一根的論證用到介值定理（intermediate value theorem）以及嚴格單調性，而求最小值時則默默用到一個事實：$\alpha \mapsto k$ 是 $(0, \pi)$ 與 $(0, 1)$ 之間的雙射（bijection），因此對 α 求最小值等同於對 k 求最小值。要把這類重新參數化（reparametrisation）和存在性論證變得嚴謹，正是實分析（real analysis）入門課程的工作；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是極佳的起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。