詳細解答

STEP I 2011，第 4 題

純數學 • 拋物線的切線

> **STEP I 2011，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q4

關鍵思路

把拋物線（parabola）上一般點的切線（tangent）寫成不含分數的形式，兩條切線的交點只需相減便可得出。至於角度，則用 $\overrightarrow{FT}$ 與 $\overrightarrow{FP}$ 的純量積（scalar product）。各段長度其實比表面看來容易處理：FP 是焦半徑（focal distance），而 FT^2 可以因式分解。求得 $\cos\phi$ 之後，留意答案對 p 和 q 是對稱的。這種對稱性就是證明角平分的全部關鍵。

解答

點 T

對 $y^2 = 4ax$ 作隱函數求導（implicit differentiation），得 $2y\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$。因此在 P 點，即 $y = 2ap \neq 0$ 之處（因為 $p \neq 0$），斜率為 $\dfrac{4a}{4ap} = \dfrac{1}{p}$。所以 P 點的切線為

$$y - 2ap = \frac{x - ap^2}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + ap^2,$$

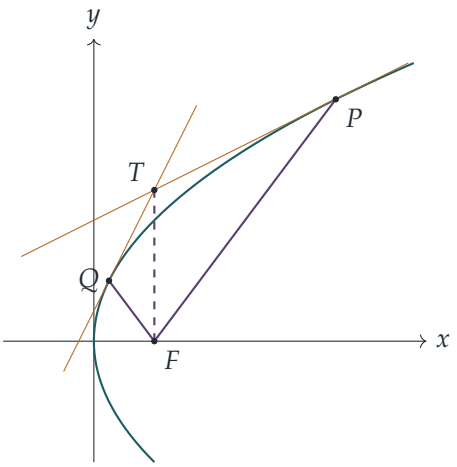
同理，Q 點的切線為 $qy = x + aq^2$。兩式相減，得

$$(p - q)\,y = a(p^2 - q^2) = a(p - q)(p + q).$$

由於 P 和 Q 是相異的點，$p \neq q$，故可以除以 $p - q$，得 $y = a(p + q)$。於是

$$x = py - ap^2 = ap^2 + apq - ap^2 = apq,$$

所以 T 是點 $(apq,\, a(p + q))$，與所求相符。



圖中取 $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$，此時 FT 恰好是鉛垂的。

角 ϕ

首先注意 $T \neq F$：否則需要 $p+q=0$ 及 $pq=1$，從而 $p^2=-1$，這是不可能的。所以角 TFP 是有意義的。設 $F=(a,0)$，則

$$\overrightarrow{FP}=a\begin{pmatrix}p^2-1\\2p\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{FT}=a\begin{pmatrix}pq-1\\p+q\end{pmatrix}.$$

兩者的長度為

$$FP^2=a^2[(p^2-1)^2+4p^2]=a^2(p^2+1)^2,$$
$$FT^2=a^2[(pq-1)^2+(p+q)^2]=a^2[p^2q^2+p^2+q^2+1]=a^2(p^2+1)(q^2+1),$$

因為交叉項 $-2pq$ 與 $+2pq$ 互相抵消。所以 $FP=|a|(p^2+1)$，而 $FT=|a|\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}$。

想一想 我們怎樣看出純量積可以因式分解？

我們預期 (p^2+1) 會與 FP 約去，所以刻意尋找這個因式。展開得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}&=a^2[(p^2-1)(pq-1)+2p(p+q)]\\&=a^2[p^3q-p^2-pq+1+2p^2+2pq]\\&=a^2[p^3q+pq+p^2+1]\\&=a^2(p^2+1)(pq+1).\end{aligned}$$

因此，利用 $|a|^2=a^2$，

$$\cos\phi=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}}{FP\cdot FT}=\frac{a^2(p^2+1)(pq+1)}{a^2(p^2+1)\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}}=\frac{pq+1}{\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}},$$

這正是所求的結果。

角平分

T 的坐標對 p 和 q 是對稱的，所以在上面的計算中把 P 和 Q 的角色對調，便知角 TFQ 滿足

$$\cos\angle TFQ = \frac{qp+1}{\sqrt{(q^2+1)(p^2+1)}} = \cos\phi.$$

兩個角都在 $[0,\pi]$ 之內，而餘弦在此區間上是一一對應（one-to-one）的，所以 $\angle TFP = \angle TFQ = \phi$。

因此，射線（ray）FP 和 FQ 各自與射線 FT 成 ϕ 角。在平面上，從 F 出發而與 FT 成 ϕ 角的射線只有兩條，而且它們以直線 FT 為鏡互為鏡像。射線 FP 和 FQ 並不是同一條射線：一條穿過焦點（focus）的直線與拋物線相交於 F 兩側的兩點（或只相交一次），所以從 F 出發的一條射線不可能同時經過 P 和 Q。因此 FP 和 FQ 互為對直線 FT 的反射，而這正好表示直線 FT 平分角 PFQ。

有一個細節可以解釋為何題目說的是直線 FT。若 $pq+1>0$，則 $\phi<\frac{\pi}{2}$，射線 FT 本身位於角 $PFQ = 2\phi$ 之內。若 $pq+1<0$，則 $\phi>\frac{\pi}{2}$，角 PFQ 為 $2\pi-2\phi$，平分它的是 TF 越過 F 的延長線。若 $pq=-1$，則 PQ 是焦弦（focal chord），$\phi=\frac{\pi}{2}$，而 FT 與它垂直，平分這個平角。在所有情況下，直線 FT 都平分角 PFQ。

驗算

取圖中的 $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$：$T=(1,\frac{5}{2})$，$\overrightarrow{FP}=(3,4)$，$\overrightarrow{FQ}=(-\frac{3}{4},1)$，$\overrightarrow{FT}=(0,\frac{5}{2})$。於是 $\cos\angle TFP=\frac{4}{5}$，而 $\cos\angle TFQ=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}$，與 $\dfrac{2}{\sqrt{5\cdot\frac{5}{4}}}=\dfrac{4}{5}$ 吻合。用電腦測試 10^5 組隨機選取的 a（正負皆有）、p 和 q，在 10^{-10} 的誤差範圍內證實了 T 的坐標、$\cos\phi$ 的公式以及角平分的結論。測試包括許多 $pq<-1$ 的情況，此時是 FT 向後的延長線起平分作用。

常見錯誤

- 除以 $p-q$ 時沒有說明它為何不等於零（因為兩點相異）。
- 寫成 $FP=a(p^2+1)$，這在 $a<0$ 時是錯的。$\cos\phi$ 中只出現 a^2，所以最終 a 的正負並無影響。
- 只說「餘弦相等，所以 FT 平分該角」，卻沒有解釋為何 FP 和 FQ 位於直線 FT 的兩側。

STEP 之外

這其實是拋物線的反射性質（reflective property）換了個樣子出現：從任何外部點引出的兩條切線段，在焦點處所張的角相等。橢圓（ellipse）和雙曲線（hyperbola）也有同樣的性質，三者都源於圓錐曲線（conic）的焦點－準線（focus–directrix）定義，大學一年級的幾何及射影幾何（projective geometry）課程會對此作更深入的發展。如想做更多同類風格的題目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）可免費取得，非常值得逐題鑽研。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。