詳細解答

STEP I 2011，第 3 題

純數學 • 三角恆等式

> **STEP I 2011，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q3

關鍵思路

在 $\frac{1}{3}\pi \mp \theta$ 處的兩個正弦相乘，可以用平方差（difference of squares）的技巧乾淨地化簡，於是一行就能證明 $(*)$。之後，餘切（cotangent）的和式來自對乘積求導：三個因子乘積的導數除以該乘積本身，就是三個「對數導數」（logarithmic derivative）之和，而對正弦而言，這些對數導數正是餘切。對餘弦的版本做同樣的事就得到正切，而 $\tan x + \cot x$ 是一個餘割（cosecant）。

解答

恆等式（identity）$(*)$

記 $a = \frac{1}{3}\pi$。由複角公式（compound-angle formulae），

$$\begin{aligned}\sin(a-\theta)\sin(a+\theta) &= (\sin a\cos\theta - \cos a\sin\theta)(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)\\ &= \sin^2 a\cos^2\theta - \cos^2 a\sin^2\theta\\ &= \sin^2 a\,(1-\sin^2\theta) - (1-\sin^2 a)\sin^2\theta = \sin^2 a - \sin^2\theta.\end{aligned}$$

由於 $\sin^2 a = \frac{3}{4}$，

$$4\sin\theta\sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 4\sin\theta\left(\tfrac{3}{4}-\sin^2\theta\right) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta,$$

最後一步用了三倍角公式（triple-angle formula）。這就對所有 θ 證明了 $(*)$。

第 (i) 部分

由於 $(*)$ 對所有 θ 成立，我們可以對兩邊求導。由乘積法則（product rule），

$$4\Big[\cos\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)-\sin\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta) \\ +\sin\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\Big]=3\cos 3\theta,$$

其中中間一項的負號來自對 $a-\theta$ 應用鏈式法則（chain rule）。

想一想 怎樣把它變成餘切？

兩邊除以 $\sin 3\theta$，而由 $(*)$，它等於 $4\sin\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)$。左邊每一項中，除了被求導的那個因子外，其餘的正弦都會約去。只要 $\sin 3\theta\neq 0$，這樣做便是容許的，而此時三個正弦亦全不為零。我們得到

$$\cot\theta-\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\cot 3\theta \qquad (\sin 3\theta\neq 0). \tag{A}$$

現在代入 $\theta=\frac{1}{9}\pi$，此時 $\sin 3\theta=\sin\frac{1}{3}\pi\neq 0$。由於 $\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$ 及 $\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$，

$$\cot\tfrac{1}{9}\pi-\cot\tfrac{2}{9}\pi+\cot\tfrac{4}{9}\pi=3\cot\tfrac{1}{3}\pi=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

在 $(*)$ 中代入 $\theta=\frac{1}{6}\pi-\phi$。四個正弦變成

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sin(\tfrac{1}{6}\pi-\phi)=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)&=\sin(\tfrac{1}{6}\pi+\phi)=\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)&=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\phi)=\cos\phi,\\ \sin 3\theta&=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-3\phi)=\cos 3\phi,\end{aligned}$$

每次都用了 $\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$。於是，把 ϕ 改記為 θ，

$$4\cos\theta\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cos 3\theta \qquad \text{對所有}\theta. \tag{**}$$

把 $(*)$ 除以 $(**)$，因子 4 互相抵消，而每個正弦除以餘弦都是正切；取倒數，

$$\cot\theta\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cot 3\theta,$$

此式在兩邊皆有定義之處成立，即 $\sin 3\theta\neq 0$ 及 $\cos 3\theta\neq 0$ 之處（每個條件都令相應的三個因子不為零）。

至於餘割的和，我們如第 (i) 部分一樣對 $(**)$ 求導：

$$4\Big[-\sin\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)+\cos\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\\ -\cos\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\Big]=-3\sin 3\theta.$$

除以 $\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)$（當它不為零時），再乘以 -1，

$$\tan\theta-\tan(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\tan(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\tan 3\theta. \tag{B}$$

(A) 與 (B) 的正負號一致，所以可以把兩式相加。

想一想 為甚麼把正切與餘切相加會有幫助？

因為 $\tan x+\cot x$ 是單一個餘割：

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}=2\operatorname{cosec}2x.$$

所以只要 $\sin 6\theta\neq 0$，把 (A) 與 (B) 相加便得

$$2\operatorname{cosec}2\theta-2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi-2\theta)+2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi+2\theta)=6\operatorname{cosec}6\theta.$$

現在取 $\theta=\frac{1}{18}\pi$，使 $2\theta=\frac{1}{9}\pi$ 及 $6\theta=\frac{1}{3}\pi$（且 $\sin 6\theta\neq 0$）。由於 $\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{5}{9}\pi$ 及 $\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{7}{9}\pi$，除以 2 得

$$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{9}\pi-\operatorname{cosec}\tfrac{5}{9}\pi+\operatorname{cosec}\tfrac{7}{9}\pi=3\operatorname{cosec}\tfrac{1}{3}\pi=3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},$$

即為所求。

驗算

- 在 $\theta=\frac{1}{6}\pi$ 時，$(*)$ 變成 $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=1=\sin\frac{1}{2}\pi$；而 $(**)$ 在 $\theta=0$ 時變成 $4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1=\cos 0$。
- 數值上，$\cot 20^\circ-\cot 40^\circ+\cot 80^\circ\approx 2.7475-1.1918+0.1763=1.7321\approx\sqrt{3}$，而 $\operatorname{cosec}20^\circ-\operatorname{cosec}100^\circ+\operatorname{cosec}140^\circ\approx 2.9238-1.0154+1.5557=3.4641\approx 2\sqrt{3}$。
- 恆等式 (A)、(B) 以及餘切乘積式都可以用計算機在任意隨機的 θ 測試；我們在數千個隨機值上驗證過。

常見錯誤

- 對 $\sin(\frac{1}{3}\pi-\theta)$ 求導時忘記鏈式法則帶來的負號，以致破壞了 (A) 中正負交替的符號。

- 除以 $\sin 3\theta$ 時沒有指出它在所代入的值上必須不為零。
- 試圖從餘切的乘積得出餘割的和：真正能夠合併的是和式 (A) 與 (B)。

STEP 之外

把導數除以函數本身的技巧就是對數微分法（logarithmic differentiation）：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f| = f'/f$ 把乘積變成和。再推進一步，sin 本身可以寫成遍及其零點的無窮乘積（infinite product），而對數微分法隨即給出著名的部分分式展開（partial-fraction expansion）$\pi\cot\pi x = \sum_n \frac{1}{x-n}$；恆等式 $(*)$ 正是它的一個有限的影子。這些想法在複分析（complex analysis）中有所發展；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是一個美妙的起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。