詳細解答

STEP I 2011，第 2 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2011，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q2

關鍵思路

積分 E 沒有初等閉式（elementary closed form），所以我們根本不打算求它的值，而是把其餘每個積分變形，直到 E 本身出現為止。對於頭兩個積分，做法是用代數除法（algebraic division）把分式拆開，從而把麻煩的 $\frac{1}{1+x}$ 分離出來。對於 (i) 和 (ii)，做法是選取一個代換（substitution），使被積函數（integrand）在 $[0,1]$ 上變回 $\frac{\mathrm{e}^u}{1+u}$：觀察指數部分，想想怎樣才能把它變成新的變量。

解答

頭兩個積分

把 x 寫成 $x=(1+x)-1$，

$$\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}=\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{1+x},$$

因此

$$\int_0^1\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x-E=\mathrm{e}-1-E,$$

正如所求。

至於第二個積分，把 x^2 除以 $1+x$：由於 $x^2=(x-1)(1+x)+1$，

$$\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x}=x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

取 $u=x$、$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 作分部積分（integration by parts），

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left[x\,\mathrm{e}^x\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

因此

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1-(\mathrm{e}-1)+E = 2-\mathrm{e}+E.$$

（另一做法是寫成 $\frac{x^2}{1+x} = x - \frac{x}{1+x}$，然後直接利用第一個結果：$1-(\mathrm{e}-1-E)$ 得出相同答案。）

第 (i) 部分

指數是最棘手的部分，所以我們把它設為新的變量：

$$u = \frac{1-x}{1+x}.$$

解出 x：$u(1+x) = 1-x$，所以 $x = \dfrac{1-u}{1+u}$。於是

$$1+x = \frac{2}{1+u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{-(1+u)-(1-u)}{(1+u)^2} = -\frac{2}{(1+u)^2}.$$

當 $x=0$ 時，$u=1$；當 $x=1$ 時，$u=0$。因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \mathrm{e}^u \cdot \frac{1+u}{2} \cdot \left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = E.\end{aligned}$$

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ 帶來的負號，用來把積分上下限調回遞增次序。

> **想一想** 為甚麼我們應該預期答案恰好是 E，而完全沒有 e？

映射 $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ 把 $[0,1]$ 映到自身（它把兩個端點互換），而因子 $\frac{1}{1+x}$ 與 $\mathrm{d}x$ 結合後恰好得到 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$。事實上 $\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$，這是記住整個計算的一個巧妙方法。

第 (ii) 部分

現在目標區間 $[0,1]$ 必須來自 $x \in [1,\sqrt{2}]$，而在這區間上 x^2 由 1 變到 2。所以我們試

$$u = x^2 - 1, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,$$

當 $x=1$ 時 $u=0$，當 $x=\sqrt{2}$ 時 $u=1$。於是

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)}, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^u,$$

因此

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}E}{2}.$$

想一想 為甚麼不用代換 $u = x^2$？

這樣也行得通，會得到 $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$，但區間是 $[1,2]$ 而不是 $[0,1]$。再平移一個單位，即 $u \mapsto u-1$，便得到相同的答案；$u = x^2 - 1$ 只不過是一步做完這兩步。

驗算

辛普森法則(Simpson's rule)給出 $E \approx 1.125386$。以數值計算，第一個積分是 $0.592896 = \mathrm{e} - 1 - E$，第二個是 $0.407104 = 2 - \mathrm{e} + E$，(i) 中的積分是 $1.125386 = E$，而 (ii) 中的積分是 $1.529558 = \frac{1}{2}\mathrm{e}E$。不用電腦也可以快速檢查是否合理：頭兩個被積函數都是正的，而的確 $\mathrm{e} - 1 - E \approx 0.59 > 0$ 及 $2 - \mathrm{e} + E \approx 0.41 > 0$；此外第二個比第一個小，這也理所當然，因為在 $[0,1]$ 上 $x^2 \leq x$。

常見錯誤

- 在 (i) 中忘記把上下限倒轉（或漏掉負號），結果得到 $-E$；對於正的被積函數，這是不可能的答案。
- 在 (ii) 中漏掉 $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u}$ 帶來的因子 e，或漏掉 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ 帶來的因子 $\frac{1}{2}$。

STEP 之外

像 E 這樣的積分與指數積分（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ 密切相關：代入 $t = 1 + x$ 可得 $E = \mathrm{e}^{-1}\big(\mathrm{Ei}(2) - \mathrm{Ei}(1)\big)$。劉維爾（Liouville）的理論證明了 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 沒有初等原函數（elementary antiderivative），這正是題目把 E 當作一個具名常數、並要求我們把一切化歸為它的原因。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多同類型的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。