詳細解答

STEP I 2011，第 12 題

概率與統計 • 排隊與選票問題

> **STEP I 2011，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 9.10 節總能找贖中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/ballot.html

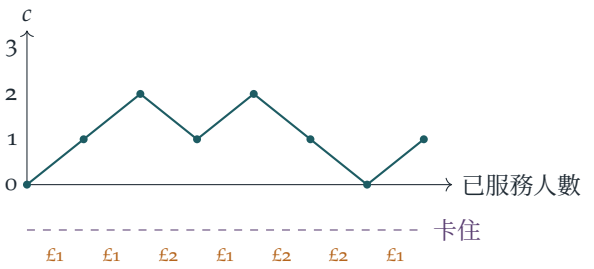
關鍵思路

只需追蹤一個數字：我手上有多少枚 £1 硬幣。每位付 £1 的顧客令這個數字加一；每位付 £2 的顧客令它減一（我收下他們的 £2 硬幣，但這枚硬幣不能用來找零）。我會卡住，當且僅當一位付 £2 的顧客到來時，我手上一枚 £1 硬幣也沒有。由於付 £2 的顧客只有寥寥幾位，危險全都集中在隊伍的前端，所以我們只需看隊伍最前面的幾個人，逐一分析每種開頭會帶來甚麼結果。

解答

重要的只是隊伍中硬幣的排列模式，而不是那些人是誰。由於所有人的排列都是等可能的，任何一個位置上的人，等可能是尚未排入隊伍的任何一人，因此我們可以從隊頭開始逐個建構隊伍：若尚餘 a 位持 £1 硬幣的人和 b 位持 £2 硬幣的人，則下一位持 £1 硬幣的概率（probability）為 $\frac{a}{a+b}$，持 £2 硬幣的概率為 $\frac{b}{a+b}$。

設 c 為我手上 £1 硬幣的數目。我能服務所有人，當且僅當 c 永遠不需要跌至 0 以下，即在隊伍中的每一點，已服務的 £1 顧客人數至少與已服務的 £2 顧客人數一樣多。



上圖顯示一條成功的隊伍：c 的路徑從未觸及虛線。

第 (i) 部分

若只有一位付 £2 的顧客，唯一會卡住的情況是此人排在隊首，那時我手上沒有零錢。若隊首是其他人，那麼到這位 £2 顧客到來時，我手上至少有一枚 £1 硬幣。這位 £2 顧客等可能排在 $m+1$ 個位置中的任何一個，因此

$$\mathrm{P}(\text{賣給所有人}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

第 (ii) 部分

以 1 表示付 £1 的顧客，以 2 表示付 £2 的顧客，並列出所有開頭。

- 若第一人是 2，我立即卡住。
- 若隊伍以 $1,2,2$ 開頭，則 c 依次為 $1,0$，我在第三人時卡住。
- 若隊伍以 $1,1$ 開頭，則兩人之後 $c=2$。付 £2 的顧客總共只有兩位，而 c 只會在服務其中一人時下跌，因此 c 永遠不會跌至 $2-2=0$ 以下。成功。
- 若隊伍以 $1,2,1$ 開頭，則 c 依次為 $1,0,1$，而只剩一位付 £2 的顧客，因此 c 永遠不會跌至 0 以下。成功。

這些情況涵蓋了所有可能，因此我能服務所有人，當且僅當隊伍以 $1,1$ 或 $1,2,1$ 開頭。從隊頭開始建構隊伍，

$$\mathrm{P}(1,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}, \quad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m} = \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+1)}.$$

這兩個事件互斥（disjoint），因此

$$\mathrm{P}(\text{賣給所有人}) = \frac{m(m-1)+2(m-1)}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m+2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1},$$

即為所求。（我們需要 $m \geq 2$，使最後一個因子中尚餘 $m-1 \geq 1$ 位 £1 顧客。）

第 (iii) 部分

現在有三位付 £2 的顧客。同樣地，看隊伍最前面的三個人。

- 以 2 開頭，或以 1, 2, 2 開頭：卡住，與 (ii) 完全相同。
- 以 1, 1, 1 開頭：此時 $c = 3$，三位 £2 顧客最多只能把 c 減至 0。成功。
- 以 1, 1, 2 或 1, 2, 1 開頭：兩種情況下，三人之後都有 $c = 1$，而餘下的是 $m - 2$ 位持 £1 硬幣的人和 2 位持 £2 硬幣的人，以隨機次序排列。

? **想一想** 在最後一種情況中，隊伍餘下的部分何時會出問題？

以 $c = 1$ 開始處理隊伍餘下的部分，就好比在一條有兩位 £2 顧客的隊伍前面，多了一位免費的 £1 顧客，這正是改頭換面的第 (ii) 部分。在 $c = 1$ 且只剩兩位 £2 顧客的情況下，我卡住當且僅當接下來兩人都是 £2 顧客：c 先變成 0，然後我便無法服務。若接下來兩人中有任何一人持 £1 硬幣，則 c 永遠不會跌至 0 以下（仿照 (ii) 檢查 1, ... 和 2, 1, ... 即可）。在首三人之後餘下的 m 人中，

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{接下來兩人都是2}) &= \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{m-1}, \\ \text{故}\quad \mathrm{P}(\text{其餘部分成功}) &= 1 - \frac{2}{m(m-1)} = \frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)}, \end{aligned}$$

這裏用了 $m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$。

設 $D = (m+3)(m+2)(m+1)$。各個有用開頭的概率為

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(1,1,1) &= \frac{m(m-1)(m-2)}{D}, \\ \mathrm{P}(1,1,2) &= \frac{m \cdot (m-1) \cdot 3}{D}, \qquad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m \cdot 3 \cdot (m-1)}{D}. \end{aligned}$$

由於各個開頭互斥，而且無論開頭如何，隊伍餘下的部分同樣是隨機次序，

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{成功}) &= \frac{m(m-1)(m-2)}{D} + \frac{6m(m-1)}{D} \cdot \frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)} \\ &= \frac{(m-2)\left[m(m-1) + 6(m+1)\right]}{D} = \frac{(m-2)(m^2+5m+6)}{D} \\ &= \frac{(m-2)(m+2)(m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)} = \frac{m-2}{m+1}, \end{aligned}$$

即為所求。（這裏 $m \geq 3$ 確保 $m - 1 \geq 2$，使條件概率（conditional probability）有意義。）

驗算

- 最小的情況：當 $m = n$ 時，對 $n = 1, 2, 3$，公式分別給出 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$。當 $m = n = 2$ 時，由 1 和 2 組成的六種排列模式等可能，而只有 1122 和 1212 成功：$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$。✓
- m 很大時：三個概率都趨向 1，這在 £1 硬幣充裕時理應如此。
- 透過完整列舉所有隊伍次序，當 $m = 5$ 時，對 $n = 1, 2, 3$ 我得到 $\frac{5}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$，與 $\frac{m}{m+1}$、$\frac{m-1}{m+1}$、$\frac{m-2}{m+1}$ 吻合；這些公式亦已對直至 14 的每個 m 作精確驗證。

常見錯誤

- 忘記我收到的 £2 硬幣不能用來找零：只有 £1 硬幣才算數。
- 把每個人當作以固定概率 $\frac{m}{m+n}$ 獨立抽出。隊伍是以不放回抽樣（without replacement）的方式產生的，所以概率會隨着人逐一排入而改變。
- 在 (iii) 中，以為三人之後 $c = 1$ 必定安全，因而漏掉了失敗情況 1, 1, 2, 2, 2 或 1, 2, 1, 2, 2。

STEP 之外

對每個 $n \leq m$，規律都是 $\frac{m+1-n}{m+1}$。這就是*選票問題*（ballot problem），最簡潔的證明運用了*反射原理*（reflection principle）：一條觸及卡住水平的路徑可以經反射得到一條終點不同的路徑，從而把壞隊伍的數目化為單一個二項式係數（binomial coefficient）。當 $m = n$ 時，好隊伍的數目是一個卡特蘭數（Catalan number），它在組合數學中隨處可見。關於隨機遊走(random walk)和反射原理，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。