詳細解答

STEP I 2011，第 11 題

力學 • 剛體的平衡

STEP I 2011，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

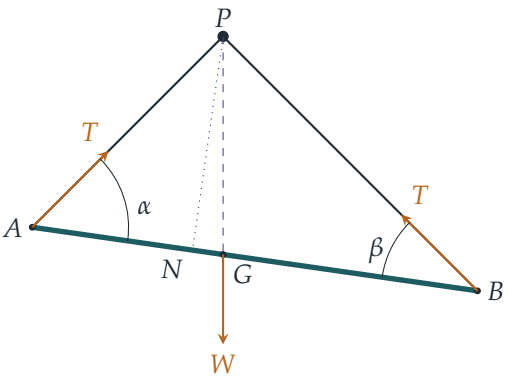
step.maths.org/questions/11-s1-q11

關鍵思路

桿上只受三個力：繩在 A 和 B 兩點的張力（tension），以及作用於 G 的重量。由於釘子光滑（smooth），兩個張力相等，因此對 G 取力矩（moments）（重量對 G 沒有力矩），便立即得出兩個角之間的關係。第二部分還需要一個事實：處於平衡（equilibrium）而又不全部平行的三個力，必定通過同一點。這一點就是釘子，所以 PG 是鉛垂的。

解答

我們把桿視為剛體桿（rigid rod），繩為輕（light）而不可伸長（inextensible）的，釘子為光滑的。設桿的重量為 W。



證明 $3\sin\alpha = 4\sin\beta$

繩是輕的，並繞過光滑的釘子，所以整條繩的張力 T 都相同。因此桿在 A 受到沿 AP 方向的力 T，在 B 受到沿 BP 方向的力 T，另外還有在 G 鉛垂向下作用的 W。

對 G 取力矩。重量沒有力矩。由 G 到直線 AP 的垂直距離是 $AG\sin\alpha = 3d\sin\alpha$，由 G 到直線 BP 的垂直距離是 $GB\sin\beta = 4d\sin\beta$，因為 $GB = 7d - 3d = 4d$。A 點的張力使桿繞 G 向一個方向轉動，B 點的張力則使桿向另一個方向轉動，所以平衡時

$$T\cdot 3d\sin\alpha = T\cdot 4d\sin\beta \quad\Longrightarrow\quad 3\sin\alpha = 4\sin\beta,$$

（兩邊除以 $Td \neq 0$）即為所求。

繩的長度

由 $\cos\beta = \frac{4}{5}$ 得 $\sin\beta = \frac{3}{5}$（β 是三角形的一個角，所以 $\sin\beta > 0$）。於是

$$\sin\alpha = \tfrac{4}{3}\sin\beta = \tfrac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5},$$

這裏取正根，因為 α 是銳角（acute）。接着

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = 0,$$

而 $0 < \alpha+\beta < \pi$，所以 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$。因此三角形 PAB 在 P 處是直角，斜邊(hypotenuse)為 $AB = 7d$。故此

$$PA = 7d\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d, \qquad PB = 7d\cos\beta = \tfrac{28}{5}d,$$

而繩的長度是

$$PA + PB = \tfrac{49}{5}d.$$

桿的傾角

想一想 我們知道 P 相對於桿的位置，但「鉛垂」方向在哪裏？

兩個張力都沿通過 P 的直線作用，所以它們的合力（resultant）也通過 P。平衡時這個合力必須與重量抵消，因此它必須與 W 大小相等、方向相反，並且在同一直線上。（處於平衡的三個不平行的力必定共點（concurrent）。）所以通過 G 的鉛垂線經過 P：PG 是鉛垂的。

設 N 為由 P 到 AB 的垂線的垂足。在直角三角形 PAN 中，

$$AN = PA\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{63}{25}d, \qquad PN = PA\sin\alpha = \tfrac{21}{5}d\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{84}{25}d.$$

由於 $AN = \frac{63}{25}d < 3d = AG$，點 N 位於 A 與 G 之間，且

$$NG = 3d - \tfrac{63}{25}d = \tfrac{12}{25}d.$$

在直角三角形 PNG 中，

$$\tan\angle PGN = \frac{PN}{NG} = \frac{84}{12} = 7.$$

角 PGN 是桿與鉛垂線 GP 之間、在 A 一側量度的角。它是銳角，所以端點 A 在通過 G 的水平線之上，而 B 在其之下，與題目給出的位置相符。桿與水平線之間的角 θ 等於 $\frac{\pi}{2} - \angle PGN$，所以

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\angle PGN} = \frac{1}{7}, \qquad \text{即} \qquad \theta = \arctan\tfrac{1}{7},$$

即為所求。

驗算

- 繩長 $\frac{49}{5}d = 9.8d$ 比桿長 $7d$ 長，符合三角形 PAB 中三角不等式（triangle inequality）的要求。
- 兩個相等張力的合力平分它們之間的夾角，所以 PG 平分角 APB。根據角平分線定理（angle bisector theorem），$PA : PB$ 應等於 $AG : GB = 3 : 4$，而 $\frac{21}{5} : \frac{28}{5} = 3 : 4$，確實如此。
- 作為數值驗算，我們把 P 放在以 A 和 B 為焦點（foci）的橢圓（ellipse）上（即在這個繩長下釘子所有可能的位置），然後找出使 G 在 P 之下的深度取駐定值（stationary）的傾角。結果是 $8.13°$，與 $\arctan\frac{1}{7} \approx 8.130°$ 吻合。

常見錯誤

- 給繩的兩段設定不同的張力。光滑的釘子不能改變輕繩中的張力。
- 把兩段距離對調，得出 $4\sin\alpha = 3\sin\beta$。較長的一段 $GB = 4d$ 應配 B 處的角。
- 忘記 α 是銳角，而容許 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$。這會得出另一個三角形，而在其中 $\alpha + \beta$ 並不是直角。

STEP 之外

在繩長固定的情況下，釘子必定位於以 A 和 B 為焦點的橢圓上。於是，PG 平分角 APB 這個事實正是橢圓的反射性質（reflection property）：在 P 點的法線（normal）平分兩條

焦半徑（focal radii）之間的夾角。此外，平衡位置恰好就是勢能（potential energy）取駐定值的位置，這正是大學一年級課程中虛功原理（principle of virtual work）和拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是學習平衡、力矩和能量方法的好讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。