詳細解答

STEP I 2011，第 10 題

力學 • 彈性碰撞

> **STEP I 2011，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q10

關鍵思路

兩個質點（particle）都由同一點從靜止開始運動，而在釋放與碰撞之間發生的一切（自由下落、一次完全彈性（perfectly elastic）的反彈）都不會損失任何能量。因此在任一高度，每個質點的速率都相同，而它們會在同一高度相遇。之後，碰撞就是一道標準的兩條方程問題（動量（momentum）守恆，以及 $e = 1$ 的牛頓碰撞定律（Newton's law of restitution）），而 B 的最大高度再次由能量求得。

解答

我們把 A 和 B 視為質點，忽略空氣阻力（air resistance），並全程取向上為正方向。

為何兩者速率相等

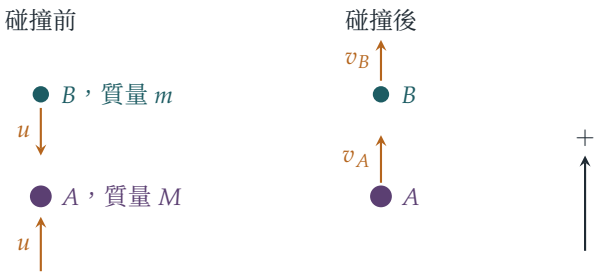
每個質點都在高度 h 處由靜止開始運動。自由飛行期間只有重力作用，所以機械能守恆（conservation of mechanical energy）；A 在平面上的反彈是完全彈性的，因此它只會令 A 的速度反向而不改變其速率，那裏也沒有損失能量。故此，在第一次碰撞之前，每個質點的單位質量總能量都是 gh，而處於高度 y 的質點的速率 v 滿足

$$\tfrac{1}{2}v^2 + gy = gh, \qquad \text{所以} \qquad v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

速率只取決於高度，與質量或質點過去的運動經歷無關。在第一次碰撞的一刻，兩個質點處於同一高度 y，所以它們的速率相等。此外，A 尚未回到 P，所以 $y < h$，而這個共同速率 $u = \sqrt{2g(h-y)}$ 是正數。由於 A 已經反彈，它正向上運動；而 B（從未反彈）則正向下運動。

碰撞

碰撞前一刻，A 的速度為 $+u$，B 的速度為 $-u$。設碰撞後一刻兩者的速度分別為 v_A 和 v_B。



碰撞中的衝力（impulsive force）是這對質點之間的內力，而在撞擊的一瞬間重力不產生任何衝量（impulse），所以動量守恆：

$$Mu - mu = Mv_A + mv_B. \tag{1}$$

碰撞是完全彈性的（$e = 1$），所以分離速率等於接近速率：

$$v_B - v_A = u - (-u) = 2u. \tag{2}$$

把由 (2) 得到的 $v_B = v_A + 2u$ 代入 (1)：

$$(M-m)u = (M+m)v_A + 2mu \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{(M-3m)u}{M+m},$$

然後

$$v_B = v_A + 2u = \frac{(M-3m)u + 2(M+m)u}{M+m} = \frac{(3M-m)u}{M+m}.$$

由於 $M > 3m$，我們有 $M - 3m > 0$，所以 $v_A > 0$；而 $v_B = v_A + 2u > 0$ 亦成立。因此第一次碰撞後兩個質點都向上運動，正如題目所要求。

> **想一想** 我們怎樣知道 B 在下一次與 A 相遇之前，確實能到達其飛行的最高點？

碰撞後兩個質點的加速度都是 $-g$，所以兩者都在飛行時，相對速度一直保持 $v_B - v_A = 2u$：B 以穩定的速率離 A 而去，因此在 A 再次撞到平面之前，兩者不可能相遇。若 A 在 B 仍在上升時反彈，就比較兩者的單位質量能量：B 的是 $\frac{1}{2}v_B^2 + gy$，A 的是 $\frac{1}{2}v_A^2 + gy$；由於 $v_B > v_A > 0$，後者較小（而 A 的反彈不改變其能量）。所以每當兩者處於同一高度時，A 的速率都小於 B 的速率。要在 B 仍在上升時從下方追上 B，A 在相遇一刻向上的速率必須至少與 B 一樣快，而我們剛剛看到這是不可能的。因此第二次碰撞只會在 B 經過其最高點之後才發生，而這個最高點正是題目所求的最大高度。

B 的最大高度

碰撞發生在高度 y 處，其中 $u^2 = 2g(h-y)$，即

$$y = h - \frac{u^2}{2g}.$$

碰撞後 B 以初速率 v_B 只在重力作用下上升，所以它會再上升 $v_B^2/(2g)$（由 $v^2 = v_B^2 - 2gs$ 並取 $v = 0$ 得出）。因此它的最大高度是

$$\begin{aligned} y + \frac{v_B^2}{2g} &= h - \frac{u^2}{2g} + \frac{(3M-m)^2u^2}{2g(M+m)^2} \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}\left[(3M-m)^2 - (M+m)^2\right] \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}(2M-2m)(4M) \\ &= h + \frac{4M(M-m)u^2}{(M+m)^2 g}, \end{aligned}$$

其中第三行用了平方差（difference of two squares）公式。這正是所求的結果。

驗算

- 能量：以上述的 v_A 和 v_B，有 $Mv_A^2 + mv_B^2 = (M+m)u^2$，正如彈性碰撞所要求。
- 極限情況（limiting case）：若 $m \to 0$，則 $v_A \to u$ 而 $v_B \to 3u$（一個極輕的球撞上一個重球，就像撞上一道移動的牆一樣反彈，相對於它以速度 $2u$ 離開），而高度變為 $h + 4u^2/g$，與 $y + 9u^2/(2g)$ 吻合。
- 由於 $M > m$，額外高度是正數：B 最終到達 P 之上，這是理所當然的，因為它從 A 獲得了能量。
- 數值方面，我們在隨機時間釋放 B，取隨機的 h 及滿足 $M > 3m$ 的質量，逐步模擬運動（包括 A 其後的反彈）直至第二次碰撞，發現 B 的最大高度與公式吻合，相對誤差約為 10^{-10}。

常見錯誤

- 正負號錯誤：把碰撞前兩個速度都取作 $+u$，就忘記了 A 正在上升時 B 正在下落。
- 把額外上升的高度 $v_B^2/(2g)$ 從平面或從 P 起計，而不是從碰撞高度 $h - u^2/(2g)$ 起計。

STEP 之外

「速率只取決於高度」這個論證，其實就是保守力（conservative force）下的能量守恆：某一點的速率只取決於該點的勢能（potential energy），與所走的路徑無關。碰撞本身通常在質心參考系（centre-of-mass frame）中處理最為簡單：在該參考系中，彈性碰撞只是把每個質點的速度反向；再變換回原參考系，一行便得到 v_A 和 v_B。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細地發展了這兩個概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。