詳細解答

STEP I 2011，第 1 題

純數學 • 隱函數微分法

> **STEP I 2011，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q1

關鍵思路

用隱函數求導（implicit differentiation），毋須把 y 解出來，就能得到每條曲線的斜率（gradient）。之後每一部分都只需寫出交點 (p,q) 須滿足的條件：它在直線上、它在曲線上，而兩者的斜率之間有某種關係（相切時相等，法線（normal）時乘積為 -1）。斜率條件給出 p 與 q 之間一個簡單的關係；把這關係代入另外兩條方程，便可用兩種不同方法確定 p，而兩者必須一致。

解答

第 (i) 部分

把 y 視為 x 的函數（function），將 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$ 對 x 求導，得

$$-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

由於 $b\neq 0$，可移項得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{ay^2}{bx^2},$$

此即所求。（曲線上每一點的 x 和 y 均不為零，因為方程中含有 a/x 和 b/y。）

斜率相等。直線 $ax+by=1$ 的斜率為 $-\frac{a}{b}$。曲線在 (p,q) 的斜率為 $-\dfrac{aq^2}{bp^2}$，因此

$$-\frac{aq^2}{bp^2}=-\frac{a}{b}\quad\Longrightarrow\quad\frac{q^2}{p^2}=1\quad\Longrightarrow\quad q^2=p^2,$$

其中我們約去了 a/b，這是容許的，因為 $a\neq 0$。故 $p=\pm q$。

兩種情況。點 (p,q) 亦滿足

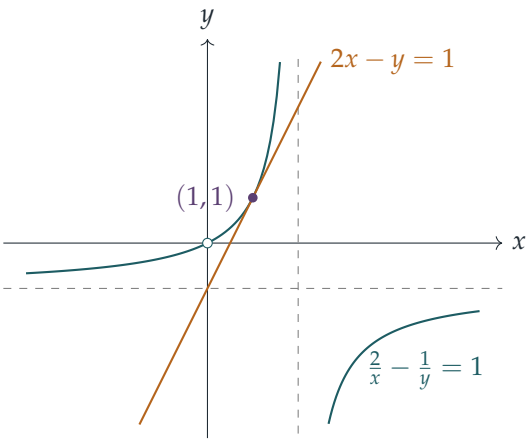
$$ap+bq=1 \qquad 及 \qquad \frac{a}{p}+\frac{b}{q}=1.$$

- 若 $q=p$：由直線得 $p(a+b)=1$，所以 $p=\dfrac{1}{a+b}$（特別地，$a+b\neq 0$）。由曲線得 $\dfrac{a+b}{p}=1$，所以 $p=a+b$。比較兩者，得 $a+b=\dfrac{1}{a+b}$，即 $(a+b)^2=1$。
- 若 $q=-p$：由直線得 $p(a-b)=1$，所以 $p=\dfrac{1}{a-b}$。由曲線得 $\dfrac{a-b}{p}=1$，所以 $p=a-b$。比較兩者，得 $(a-b)^2=1$。

所以 $(a-b)^2=1$ 或 $(a+b)^2=1$，此即所求。

> **想一想** 這樣的點真的存在嗎？還是我們只找到了一個必要條件（necessary condition）？

它們確實存在。取 $a=2$、$b=-1$，則 $a+b=1$。點 $(1,1)$ 既在直線 $2x-y=1$ 上，亦在曲線 $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=1$ 上，而兩者在該點的斜率都是 2。這裏曲線為 $y=\dfrac{x}{2-x}$，即去掉原點的一條直角雙曲線（rectangular hyperbola）。在公共點上斜率相等，表示該直線是切線（tangent）：



空心圓圈標示原點：它在雙曲線 $y=\frac{x}{2-x}$ 上，但不在原曲線上。

第 (ii) 部分

將 $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=1$ 隱函數求導，

$$-\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ay^2}{bx^2}.$$

假設直線在 (p,q) 是曲線的法線。那麼 $p \neq 0$、$q \neq 0$，而且

$$ap + bq = 1 \qquad 及 \qquad \frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 1.$$

切線斜率 $\dfrac{aq^2}{bp^2}$ 與直線斜率 $-\dfrac{a}{b}$ 都是有限且非零的，因為 a、b、p、q 全不為零。所以「法線」即表示兩者乘積為 -1：

$$\frac{aq^2}{bp^2} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \Longrightarrow \quad a^2q^2 = b^2p^2 \quad \Longrightarrow \quad aq = \pm bp.$$

想一想 哪一個正負號是可能的？

把每個符號代入曲線方程檢驗。

- 若 $aq = bp$，則 $\dfrac{b}{q} = \dfrac{a}{p}$，所以 $\dfrac{a}{p} - \dfrac{b}{q} = 0 \neq 1$。這個符號不可能。
- 若 $aq = -bp$，則 $\dfrac{b}{q} = -\dfrac{a}{p}$，於是曲線方程變為 $\dfrac{2a}{p} = 1$，得 $p = 2a$，從而 $q = -\dfrac{bp}{a} = -2b$。

把 $p = 2a$、$q = -2b$ 代入直線方程，得

$$2a^2 - 2b^2 = 1, \qquad 即 \qquad a^2 - b^2 = \tfrac{1}{2},$$

此即所求。法線的垂足為點 $(2a, -2b)$。

驗算

- 對於第 (i) 部分，上面 $a = 2$、$b = -1$ 的例子滿足 $(a+b)^2 = 1$，而直線在 $(1,1) = (p,p)$ 相切。同樣，$a = 2$、$b = 1$ 滿足 $(a-b)^2 = 1$，而直線 $2x + y = 1$ 在 $(1,-1)$ 與 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 相切。
- 對於第 (ii) 部分，取 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$b = \frac{1}{2}$，使 $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$，並取點 $(2a, -2b) = (\sqrt{3}, -1)$。直線給出 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$，曲線給出 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$。該點的切線斜率為 $\dfrac{aq^2}{bp^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$，直線斜率為 $-\sqrt{3} \approx -1.732$，乘積為 -1。
- 數值上，在數以百計的隨機點，斜率公式都與有限差分（finite difference）所得的斜率吻合；而對 (a,b) 作隨機搜尋，只有當 $a^2 - b^2$ 在捨入誤差範圍內等於 0.5 時才會找到法線。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分遺漏 $q = -p$ 的情況：正是這個情況給出 $(a-b)^2 = 1$。
- 在第 (ii) 部分停在 $aq = \pm bp$，沒有檢查曲線容許哪一個符號。

STEP 之外

隱函數求導讓我們初窺隱函數定理（implicit function theorem）：在任何滿足 $\partial F/\partial y \neq 0$ 的點附近，方程 $F(x,y) = 0$ 把 y 定義為 x 的可微函數，且 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -F_x/F_y$。這裏的相切論證亦有一個代數上的「孿生」版本：一條直線與一條圓錐曲線（conic）相切，當且僅當求兩者交點的二次方程有重根（repeated root）；你可以用這方法重新推導第 (i) 部分。若想了解這一切背後的分析（analysis），可讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。