詳細解答

STEP III 2010，第 9 題

力學 • 圓上的運動

STEP III 2010，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

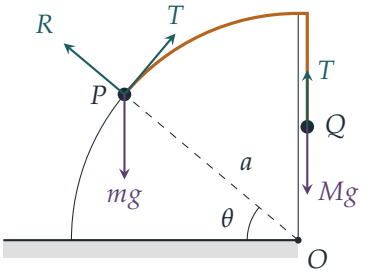
step.maths.org/questions/10-s3-q9

關鍵思路

由於繩子不可伸長（inextensible），而木塊光滑（smooth），P 和 Q 始終以相同的速率運動，而且整個系統的能量守恆（conservation of energy）。這樣便能把 P 的速率寫成 θ 的函數（function），完全不用解任何微分方程（differential equation）。接着，由於 P 在圓周上運動，沿指向 O 的方向分解力，便可求出法向反作用力（normal reaction）。保持接觸即表示這個反作用力始終非負，而利用凹性（concavity）論證，可知只需檢查木塊頂部的情況便足夠。

解答

模型。 P 和 Q 是質點（particle），繩子輕而不可伸長，木塊光滑，因此整條繩子上的張力（tension）T 處處相同。設 P 位於圓弧上角度 θ 的位置。繩子由 P 沿圓弧伸延至木塊頂部，然後沿鉛垂面旁邊垂直向下連到 Q。



速率。 當 P 由 $\theta = 0$ 移動到 θ 時，它走過了長度為 $a\theta$ 的圓弧，因此 Q 下降了距離 $a\theta$。兩者都以速率 $v = a\dot{\theta}$ 運動。與此同時，P 上升了高度 $a\sin\theta$。木塊光滑，而繩子對整個系統不做淨功（因為它不可伸長），所以能量守恆。由靜止開始，

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v^2 = Mga\theta - mga\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = \frac{2ga\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

由於 $M\theta > m\theta \geq m\sin\theta$，此式在 $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ 時為正，所以系統確實會由靜止開始運動。

法向反作用力。 P 繞 O 沿半徑為 a 的圓周運動，因此它指向 O 的加速度為 v^2/a。作用於 P 的力如下：

- 沿 OP 方向、背離 O 的反作用力 R；
- 沿切線（tangent）方向的張力 T，它沒有徑向分量；
- 重力 mg，由於 OP 與水平方向成角 θ，它指向 O 的分量為 $mg\sin\theta$。

沿指向 O 的方向分解，

$$mg\sin\theta - R = \frac{mv^2}{a} = \frac{2mg\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

因此

$$\begin{aligned} R &= \frac{mg\big[(m+M)\sin\theta - 2M\theta + 2m\sin\theta\big]}{m+M} \\ &= \boxed{\frac{mg\big[(3m+M)\sin\theta - 2M\theta\big]}{m+M}.} \end{aligned}$$

想一想 對 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 內的每一個 θ，R 都必須非負。我們是否需要找出 R 的最小值？

條件。 P 保持接觸，當且僅當 $R \geq 0$ 在整個過程中成立，即

$$f(\theta) = (3m+M)\sin\theta - 2M\theta \geq 0 \quad \text{對所有} 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

我們不需要求最小值。由於在這個區間上 $f''(\theta) = -(3m+M)\sin\theta \leq 0$，$f$ 是凹函數，所以它的圖像位於連接兩個端點的弦（chord）之上或弦上。又因為 $f(0) = 0$，所以：

- *必要性*（*necessity*）。若 P 在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 時仍保持接觸，則 $f(\frac{1}{2}\pi) = 3m + M - \pi M \geq 0$。
- *充分性*（*sufficiency*）。若 $f(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$，則由 $(0,0)$ 到 $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi))$ 的弦位於橫軸之上或橫軸上。由凹性可知 f 位於弦之上或弦上，所以在整個區間上 $f \geq 0$。

因此條件是 $3m \geq (\pi - 1)M$，即

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\pi - 1}{3},$$

得證。注意 $(\pi - 1)/3 \approx 0.714 < 1$，所以這與 $m < M$ 並無矛盾。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，得 $R = 0$。這是正確的：開始時 P 位於木塊底部，半徑 OP 是水平的，P 的重量由桌面承托。
- 對 P 沿切線方向分解、對 Q 沿鉛垂方向分解，可得 $T = \dfrac{Mmg(1 + \cos\theta)}{m + M} > 0$，所以繩子在整個過程中確實保持拉緊。
- 數值上，取 $m = 0.8$、$M = 1$ 及 $a = 1$（比值 $0.8 > 0.714$），逐步數值求解運動方程（equation of motion），並用牛頓第二定律（Newton's second law）計算 R，結果與公式吻合至 10^{-13}，而且 R 始終非負。若取 $m/M = \frac{2}{3}$，則 R 在接近頂部時為負。

常見錯誤

- 忘記 Q 也有動能（kinetic energy），因而寫成 $\frac{1}{2}mv^2$ 而非 $\frac{1}{2}(m + M)v^2$。
- 把張力放進徑向方程。在光滑表面上，繩子沿 P 點的切線方向。
- 只檢查 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 時 $R \geq 0$，卻沒有說明為何這樣已經足夠。正是 f 的凹性令這樣做足夠。

STEP 之外

在這裏，能量守恆代替了求解運動方程 $(m + M)a\ddot{\theta} = g(M - m\cos\theta)$。這就是首次積分（first integral）的概念，它在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中處於核心地位：繩子是一個約束（constraint），而單一個坐標 θ 便能描述整個系統。本題屬於「珠子離開球面」這一類問題，Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這類問題有詳細的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。