詳細解答

STEP III 2010，第 8 題

純數學 • 利用商法則積分

> **STEP III 2010，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q8

關鍵思路

表達式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ 正是對商 R/Q 求導時得到的分子（numerator）。因此，只要能找到一個 R 產生所給的 P，任何形如 P/Q^2 的被積函數（integrand）都可以一眼積出來。在兩個部分中，分母都告訴我們 Q 是甚麼，然後我們透過比較係數（comparing coefficients）求出 R。在第 (ii) 部分，微分方程（differential equation）的左邊原來恰好是 $\mathrm{Q}y' - \mathrm{Q}'y$，即是同一個結構換了個樣子出現。

解答

一般積分

由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) = \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{R}'(x) - \mathrm{Q}'(x)\mathrm{R}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2},$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} + C.$$

第 (i) 部分

這裏 $\mathrm{Q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$，所以 $\mathrm{Q}'(x) = 2 + 6x$。設 $\mathrm{R}(x) = a + bx + cx^2$，則 $\mathrm{R}'(x) = b + 2cx$，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= (1 + 2x + 3x^2)(b + 2cx) - (2 + 6x)(a + bx + cx^2) \\ &= (b - 2a) + (2c - 6a)x + (2c - 3b)x^2.\end{aligned}$$

（兩個乘積各自產生的 x^3 項 $6cx^3$ 互相抵消。）我們需要它等於 $5x^2 - 4x - 3$，所以

$$b - 2a = -3, \qquad 2c - 6a = -4, \qquad 2c - 3b = 5.$$

由頭兩條得 $b = 2a - 3$ 及 $c = 3a - 2$。代入第三條，

$$2(3a - 2) - 3(2a - 3) = 6a - 4 - 6a + 9 = 5,$$

這對任何 a 都成立。所以第三條方程沒有提供新資訊，每個 a 值都可行：

$$\mathrm{R}(x) = a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2.$$

取 $a = 1$ 得到最整潔的選擇 $\mathrm{R}(x) = 1 - x + x^2$，因此

$$\int \frac{5x^2 - 4x - 3}{(1 + 2x + 3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} + C.$$

分母永不為零（其判別式（discriminant）為 $4 - 12 < 0$），所以此式對所有實數 x 成立。

不唯一性。 我們剛看到有效的 R 組成一個單參數族，所以選擇並不唯一：例如 $a = 0$ 給出 $\mathrm{R} = -3x - 2x^2$，$a = 1$ 給出 $\mathrm{R} = 1 - x + x^2$，兩者都可行。把一般 a 的選擇與 $a = 0$ 的選擇比較，

$$(a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2) - (-3x - 2x^2) = a + 2ax + 3ax^2 = a\,\mathrm{Q}(x).$$

? **想一想** 為甚麼在 R 上加上 Q 的倍數不會帶來任何分別？

若以 $\mathrm{R} + k\mathrm{Q}$ 取代 R，其中 k 為常數，則

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R} + k\mathrm{Q})' - \mathrm{Q}'(\mathrm{R} + k\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} + k(\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R},$$

所以 P 不變。相應地，答案 R/Q 變成 $\mathrm{R}/\mathrm{Q} + k$：不同的 R 給出的原函數（antiderivative）只相差一個常數，而這個常數會被任意的積分常數（constant of integration）吸收。例如，

$$\frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} = \frac{-3x - 2x^2}{1 + 2x + 3x^2} + 1.$$

第 (ii) 部分

設 $\mathrm{Q}(x) = 1 + \cos x + 2\sin x$。則 $\mathrm{Q}'(x) = -\sin x + 2\cos x$，所以方程中 y 的係數 $\sin x - 2\cos x$ 恰好是 $-\mathrm{Q}'(x)$。因此方程為

$$\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Q}'y = 5 - 3\cos x + 4\sin x.$$

在任何 $\mathrm{Q} \neq 0$ 的區間上，我們除以 Q^2，並看出左邊是一個商的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right) = \frac{5 - 3\cos x + 4\sin x}{\mathrm{Q}^2}.$$

（換句話說，$1/\mathrm{Q}^2$ 是一個積分因子（integrating factor）。）要積出右邊，我們尋找一個 R 使得 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = 5 - 3\cos x + 4\sin x$。仿照 Q 的形式，試設 $\mathrm{R} = a + b\cos x + c\sin x$，於是 $\mathrm{R}' = -b\sin x + c\cos x$。展開，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' &= -b\sin x + c\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + c\cos^2 x - 2b\sin^2 x,\\ \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= -a\sin x + 2a\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + 2b\cos^2 x - c\sin^2 x.\end{aligned}$$

相減後，$\sin x\cos x$ 項互相抵消，而平方項合併為 $(c - 2b)(\cos^2 x + \sin^2 x) = c - 2b$。所以

$$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = (c - 2b) + (c - 2a)\cos x + (a - b)\sin x.$$

與 $5 - 3\cos x + 4\sin x$ 比較：

$$c - 2b = 5, \qquad c - 2a = -3, \qquad a - b = 4.$$

第一條方程減去第二條得 $2a - 2b = 8$，又是第三條方程，所以與第 (i) 部分一樣有一個自由參數，原因也相同。取 $b = 0$ 得 $c = 5$、$a = 4$，所以 $\mathrm{R} = 4 + 5\sin x$。因此

$$\frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{4 + 5\sin x}{1 + \cos x + 2\sin x} + C,$$

而通解（general solution）為

$$y = 4 + 5\sin x + C(1 + \cos x + 2\sin x),$$

其中 C 為任意常數。雖然我們求解時除以了 Q，但直接代入可以確認這個函數對每個 x 都滿足方程。其他 b 的選擇只會令 C 平移：例如 $b = -2$ 給出 $\mathrm{R} = 2 - 2\cos x + \sin x = (4 + 5\sin x) - 2\mathrm{Q}$。

驗算

- 在第 (i) 部分，由我們的原函數，被積函數的 $\int_0^1$ 應為 $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$；辛普森法則（Simpson's rule）給出 $-0.83333\ldots$，而且對每個 a 的選擇，在隨機區間上結果都吻合。

- 在第 (ii) 部分，代入 $y = 4 + 5\sin x$：左邊為 $(1 + \cos x + 2\sin x)5\cos x - (2\cos x - \sin x)(4 + 5\sin x) = 5 - 3\cos x + 4\sin x$。而 $y = \mathrm{Q}$ 給出 $\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q} = 0$，即餘函數（complementary function）。
- 以數值方法（龍格－庫塔法（Runge–Kutta））由 $y(0.5) = 1.7$ 解方程至 $x = 1.5$，得 3.910638，與取相應 C 的公式吻合。

常見錯誤

- 以為三個未知數的三條方程必定有唯一解。這裏它們是相依的，而這正是不唯一性問題的重點所在。
- 在第 (ii) 部分弄錯 Q' 的正負號：$\mathrm{Q}' = 2\cos x - \sin x$，所以 y 的係數是 $-\mathrm{Q}'$，而不是 $+\mathrm{Q}'$。
- 忘記在最終答案中積分常數是乘以 Q 的：通解是 $y = \mathrm{R} + C\mathrm{Q}$，而不是 $y = \mathrm{R} + C$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的方程是一條一階線性微分方程（first-order linear differential equation），其通解的形狀是「特解（particular solution）加上齊次方程（homogeneous equation）之解的倍數」，這個模式貫穿所有線性問題。表達式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ 是 Q 與 R 的朗斯基行列式（Wronskian），它在二階線性方程中擔當核心角色，尤其是在降階法（reduction of order）和參數變易法（variation of parameters）之中。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）同時涵蓋積分因子和朗斯基行列式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。