詳細解答

STEP III 2010，第 7 題

純數學 • 麥克勞林級數

STEP III 2010，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q7

關鍵思路

整個解法的關鍵，在於擺脫那個麻煩的平方根：只要把 $\sqrt{1-x^2}\,y'$ 寫成一個簡潔的式子，再微分一次，二階微分方程（second-order differential equation）便自然得出。之後反覆微分，係數會呈現出一個規律，再用歸納法（induction）加以證明。把 $x=0$ 代入一般關係式，便得到麥克勞林係數（Maclaurin coefficients）的遞推關係（recurrence）；當 m 為偶數時，這個遞推關係會遇上一個等於零的因子，於是級數就此終止。

解答

微分方程

設 $\theta = \arcsin x$，則 $\sin\theta = x$，其中 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$；而當 $|x|<1$ 時，$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$。於是 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，且 $y = \cos m\theta$，由鏈式法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\sin m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{亦即，} \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\sin m\theta.$$

將此式對 x 微分，左邊使用乘積法則（product rule）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m^2\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{m^2 y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

兩邊同乘 $\sqrt{1-x^2}$（它不等於零），得

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2 y = 0,$$

此即所求。（此處及以下，$y^{(n)}$ 表示 $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$。）

三階及四階方程

將剛證明的方程微分。乘積 $(1-x^2)y''$ 給出 $(1-x^2)y''' - 2xy''$，而 xy' 給出 $xy'' + y'$，因此

$$(1-x^2)\,y''' - 3x\,y'' + (m^2-1)\,y' = 0.$$

以同樣方法再微分一次，

$$(1-x^2)\,y^{(4)} - 2x\,y''' - 3x\,y''' - 3y'' + (m^2-1)\,y'' = 0,$$

故

$$(1-x^2)\,y^{(4)} - 5x\,y''' + (m^2-4)\,y'' = 0.$$

一般關係式

x 的係數依次為 $1, 3, 5$，常數項依次為 m^2-0^2, m^2-1^2, m^2-2^2，因此我們猜想對每個整數 $n \geq 0$，

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (m^2-n^2)\,y^{(n)} = 0. \qquad (*)$$

我們對 n 用歸納法證明。$n=0$ 的情況就是最先證明的方程。假設 $(*)$ 對某個 n 成立。將其微分，

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,y^{(n+3)} - 2x\,y^{(n+2)} - (2n+1)\,x\,y^{(n+2)} \\ - (2n+1)\,y^{(n+1)} + (m^2-n^2)\,y^{(n+1)} = 0.\end{aligned}$$

合併同類項，$x\,y^{(n+2)}$ 的係數為 $-(2n+3) = -(2(n+1)+1)$，而 $y^{(n+1)}$ 的係數為 $m^2-(n^2+2n+1) = m^2-(n+1)^2$。因此

$$(1-x^2)\,y^{(n+3)} - (2(n+1)+1)x\,y^{(n+2)} + (m^2-(n+1)^2)y^{(n+1)} = 0,$$

這正是以 $n+1$ 代替 n 的 $(*)$。由歸納法，$(*)$ 對所有 $n \geq 0$ 成立。

麥克勞林級數

當 $x=0$ 時 $\theta = 0$，故 $y(0) = \cos 0 = 1$，且 $y'(0) = -m\sin 0 = 0$。將 $x=0$ 代入 $(*)$，中間一項便消失：

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-m^2)\,y^{(n)}(0).$$

由於 $y'(0)=0$，所有奇數階導數在 0 處均為零。至於偶數階導數，

$$\begin{aligned}y''(0) &= (0-m^2)\cdot 1 = -m^2,\\ y^{(4)}(0) &= (2^2-m^2)(-m^2) = m^2(m^2-2^2),\\ y^{(6)}(0) &= (4^2-m^2)\,m^2(m^2-2^2) = -m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2),\end{aligned}$$

一般而言 $y^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots(m^2-(2k-2)^2)$。因此麥克勞林級數（Maclaurin series）為

$$y = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\,x^6}{6!} + \cdots,$$

而首三個非零項為 $1 - \dfrac{m^2x^2}{2!} + \dfrac{m^2(m^2-2^2)x^4}{4!}$。（只要 $m \neq 0, \pm 2$，這些項都不為零；對於這些值，級數的項數較少，下一部分會加以解釋。）

偶數 m

設 m 為偶數，並記 $|m| = 2p$。因子 $m^2 - (2p)^2$ 等於零，而一旦 $2k - 2 \geq 2p$，它便會出現在 $y^{(2k)}(0)$ 之中。所以階數大於 $|m|$ 的每個導數在 $x = 0$ 處都等於零，麥克勞林級數在 $x^{|m|}$ 項便終止。

> **想一想** 一個終止的級數只告訴我們函數在 $x = 0$ 這一點的各階導數。我們怎樣知道對每個 $|x| < 1$，y 真的等於這個多項式（polynomial）？

我們再次利用 $(*)$，這次是在整個區間上。取 $n = |m|$，使 $m^2 - n^2 = 0$，並設 $v = y^{(n+1)}$。於是 $(*)$ 變成

$$(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v = 0 \qquad (|x| < 1).$$

這個一階方程的積分因子（integrating factor）為 $(1-x^2)^{(2n-1)/2}$；事實上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v\Big] = (1-x^2)^{(2n-1)/2}\Big[(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v\Big] = 0,$$

所以 $(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v$ 在 $(-1,1)$ 上是常數。它在 $x = 0$ 的值為 $v(0) = y^{(n+1)}(0) = 0$，因為 $n+1$ 是奇數。因此 $v \equiv 0$，即對所有 $|x| < 1$，$y^{(|m|+1)}(x) = 0$，故 y 是次數最多為 $|m|$ 的多項式。多項式等於其本身的麥克勞林級數，所以對 $|x| < 1$，

$$\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \cdots,$$

右邊就是上面那個會終止的級數。

現在設 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$，並令 $x = \sin\theta$。則 $|x| < 1$，且 $\arcsin(\sin\theta) = \theta$（對 θ 的限制正是在這裏用上），所以

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2\sin^2\theta}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\sin^4\theta}{4!} - \cdots,$$

這是一個關於 $\sin\theta$ 的多項式，其開首各項與所求相符。

最後，$\sin^{|m|}\theta$ 的係數為 $y^{(|m|)}(0)/|m|!$，即 $\pm m^2(m^2-2^2)\cdots(m^2-(|m|-2)^2)/|m|!$。這些因子都不為零，因為當 $2j \leq |m| - 2$ 時 $(2j)^2 < m^2$。所以當 $m \neq 0$ 時，這個多項式的次數恰好是 $|m|$（即當 m 為正偶數時，次數為 m）；當 $m = 0$ 時，它是常數 1。

驗算

- $m = 2$：級數給出 $1 - 2\sin^2\theta$，這正是我們熟悉的 $\cos 2\theta$。
- $m = 4$：級數給出 $1 - 8\sin^2\theta + \frac{16\cdot 12}{24}\sin^4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$。直接計算，$\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$。兩者一致。
- 我們利用 $\cos(m \arcsin x)$ 在各點的泰勒展開（Taylor expansion），在 200 組隨機的 (m, x) 上，以數值方法驗證了 $n = 0, \ldots, 8$ 時的 $(*)$（最大相對殘差約為 10^{-13}），並對所有不超過 12 的偶數 m 驗證了 $\cos m\theta$ 與該多項式相等。例如當 $m = 6$、$\theta = 1$ 時，兩邊都等於 0.96017。

常見錯誤

- 微分 $(1 - x^2)y^{(n+2)}$ 時，漏掉乘積法則產生的 $-2x\,y^{(n+2)}$ 項：正是這一項把 $2n + 1$ 變成 $2n + 3$。
- 以為終止的麥克勞林級數必定等於原函數。這裏確實如此，但需要用 $v = y^{(|m|+1)}$ 的論證（或其他理據）來說明。
- 把次數寫成 $m/2$：這個多項式只含 $\sin\theta$ 的偶數次冪，但最高次冪是 $\sin^m\theta$。

STEP 之外

若改為代入 $x = \cos\phi$，同類方程便化為切比雪夫（Chebyshev）方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$，其多項式解 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ 就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials），在數值逼近中佔核心地位。我們把 $x = 0$ 代入經微分的方程以得出係數遞推關係的技巧，正是線性常微分方程（linear ODEs）的*冪級數法*（power series method）的起點；在這個方法中，級數在特殊參數值下終止，正是勒讓德（Legendre）多項式、埃爾米特（Hermite）多項式和切比雪夫多項式產生的方式。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）有一章清晰講解級數解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。