詳細解答

STEP III 2010，第 6 題

純數學 • 三維空間中的旋轉

> **STEP III 2010，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q6

關鍵思路

繞一條軸的旋轉（rotation）會令軸上每一點保持不動，而對垂直於該軸的平面內的一切，則完全如同該平面上的一個旋轉般轉動。因此每一步都可化為一個二維旋轉：找出被轉動的平面，寫下該平面內一對標準正交（orthonormal）向量，然後把它們旋轉。任何沿軸方向的向量都只會原封不動，而單是這一點觀察，便已替 Q 的計算完成了大部分工作。

解答

以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示沿各坐標軸的單位向量（unit vectors），於是 P_0、Q_0、R_0 的位置向量（position vectors）分別為 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$。

第 (i) 部分

繞 z 軸旋轉會把 x-y 平面轉過 ϕ，而 $\mathbf{i}$ 朝 $\mathbf{j}$ 的方向移動。因此

$$P_1 = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0).$$

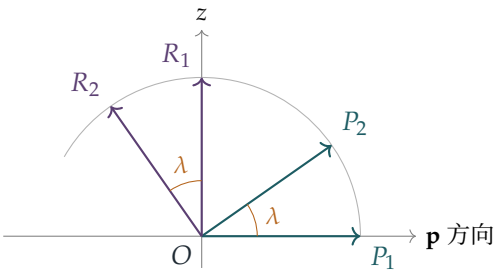
為了稍後之用：同一個旋轉把 $\mathbf{j}$ 送到 $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$，因為在該平面內 Q 始終領先 P 一個直角；而 R_0 位於軸上，故保持不動：$R_1 = (0,0,1)$。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP_1} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$。在 x-y 平面內垂直於 OP_1 的直線，其方向為

$$\mathbf{u} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0),$$

因為 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}=0$ 及 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}=0$。垂直於這條軸的平面，就是由標準正交向量對 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{k}$ 所張成的平面，而第二次旋轉把這個平面轉過 λ，其中 $\mathbf{p}$ 朝 $\mathbf{k}$ 的方向移動：



在該平面內，這個旋轉把

$$\mathbf{p}\mapsto\cos\lambda\,\mathbf{p}+\sin\lambda\,\mathbf{k},\qquad \mathbf{k}\mapsto-\sin\lambda\,\mathbf{p}+\cos\lambda\,\mathbf{k},$$

其中第二式成立，是因為 $\mathbf{k}$ 始終領先 $\mathbf{p}$ 一個直角。因此

$$P_2=(\cos\lambda\cos\phi,\ \cos\lambda\sin\phi,\ \sin\lambda),\qquad R_2=(-\sin\lambda\cos\phi,\ -\sin\lambda\sin\phi,\ \cos\lambda).$$

想一想 在第二次旋轉中，Q 會去到哪裏？

第一次旋轉後，Q 位於 $Q_1=(-\sin\phi,\cos\phi,0)$，這恰好就是 $\mathbf{u}$：它正正位於第二次旋轉的軸上，所以不會移動。因此

$$Q_2=(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0).$$

作為驗算，P_2、Q_2、R_2 是兩兩互相垂直的單位向量(例如 $\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OR_2}=-\sin\lambda\cos\lambda\cos^2\phi-\sin\lambda\cos\lambda\sin^2\phi+\sin\lambda\cos\lambda=0$)，經過旋轉後理應如此。

第 (iii) 部分

在這一部分中，我們一直假設 $P_2\neq\pm P_0$，使 O、P_0、P_2 確實能決定一個平面。

想一想 為甚麼旋轉角會等於角 P_2OP_0？

由於 P 一直留在平面 OP_0P_2 內，旋轉軸必定是經過 O 並垂直於該平面的直線（旋轉會令一點在經過該點而垂直於軸的平面內移動）。所以 P 沿着這個平面上的大圓（great circle）移動，而平面內每個向量都轉過旋轉角。因此該角就是 $\overrightarrow{OP_2}$ 與 $\overrightarrow{OP_0}$ 之間的夾角；又由於兩者皆為單位向量，

$$\cos\theta=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_0}=(\cos\lambda\cos\phi)(1)+(\cos\lambda\sin\phi)(0)+(\sin\lambda)(0)=\cos\phi\cos\lambda,$$

此即所求。（若繞遠路轉過 $2\pi-\theta$，所得的餘弦值亦相同。）

旋轉軸同時垂直於 $\overrightarrow{OP_2}$ 和 $\overrightarrow{OP_0}$，所以它沿着兩者的向量積（cross product）方向：

$$\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{OP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\sin\phi & \sin\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ \sin\lambda,\ -\cos\lambda\sin\phi).$$

所以沿軸方向的一個向量為

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ -\cos\lambda\sin\phi \end{pmatrix}.$$

取這個定向時，按右手定則（right-hand rule）轉過 θ 的旋轉會把 P_2 帶到 P_0。留意這條軸沒有 x 分量，這是理所當然的，因為它垂直於 OP_0。

驗算

- 若 $\lambda = 0$，第二次旋轉毫無作用，所以第三次旋轉只是抵消第一次：$\theta = \phi$，而軸沿 $(0, 0, -\sin\phi)$ 方向，即 z 軸。公式與此吻合。
- 若 $\phi = 0$，唯一的旋轉是繞 y 軸進行的；而軸確實沿 $(0, \sin\lambda, 0)$ 方向，且 $\theta = \lambda$。
- 以數值驗證：對 20 000 組隨機的 (ϕ, λ)，用 Rodrigues 公式（Rodrigues' formula）施行各旋轉，均能重現 P_2、Q_2、R_2，而繞 $(0, \sin\lambda, -\cos\lambda\sin\phi)$ 轉過 θ 的旋轉亦會把 P_2 送回 P_0。當 $\phi = 0.7$、$\lambda = 0.4$ 時，$\cos\theta \approx 0.7045$，故 $\theta \approx 0.789$。

常見錯誤

- 在第二步中旋轉了 Q：它位於軸上，所以應保持不動。
- 弄錯 R_2 的正負號：當 P 向上朝 $\mathbf{k}$ 傾斜時，R 會向下傾並遠離 OP_1，所以它的水平部分是 $-\sin\lambda\,\mathbf{p}$。

STEP 之外

這裏的兩個角分別是經度（longitude）ϕ 和緯度（latitude）λ，而 $\cos\theta = \cos\phi\cos\lambda$ 正是球面餘弦定理（spherical cosine rule）的直角情形，在航海中用來計算大圓距離。更一般地說，兩個旋轉的合成（composition）仍然是繞單一條軸的旋轉（歐拉（Euler）旋轉定理），而以 $\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OQ_2}$、$\overrightarrow{OR_2}$ 為各列所組成的，正是合成旋轉的正交矩陣（orthogonal matrix）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）討論了旋轉矩陣和正交矩陣；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則展示了如何用複數（complex numbers）描述球面的旋轉。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。