詳細解答

STEP III 2010，第 5 題

純數學 • 坐標幾何作圖

> **STEP III 2010，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q5

關鍵思路

這題全靠坐標完成：先求出 R 和 S，用截距式（intercept form）寫出直線 PQ 和 RS，再看兩者各自與「過 A 且垂直（perpendicular）於 AC 的直線」交於何處。它們交於同一點，而該點必然就是 T。至於作圖，關鍵在於一個觀察：已知正方形的對角線（diagonal）正好是我們需要的邊長，而第一部分正好提供了一個只用直尺（straight-edge）就能作出與該對角線成直角的方法。

解答

證明 $TA \perp AC$

過 $C(a,a)$ 的直線很容易處理。直線 CP 連接 (a,a) 與 $(an,0)$，所以其斜率（gradient）為 $\dfrac{a}{a-an} = \dfrac{1}{1-n}$（由於 $n<1$，斜率有定義），方程為

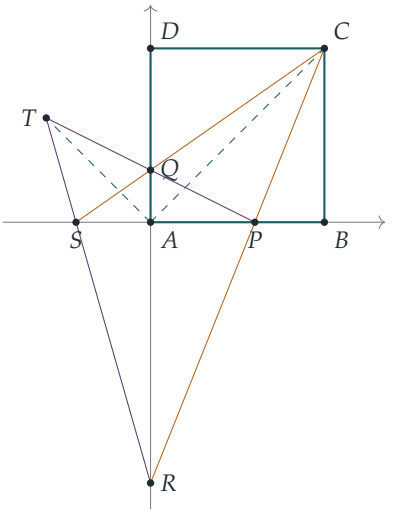
$$y = \frac{x-an}{1-n}.$$

直線 DA 是 $x=0$，所以

$$R = \left(0,\ -\frac{an}{1-n}\right).$$

同理，CQ 連接 (a,a) 與 $(0,am)$，斜率為 $1-m \neq 0$，方程為 $y = am + (1-m)x$。令 $y=0$（即直線 BA），

$$S = \left(-\frac{am}{1-m},\ 0\right).$$



現在用截距式。直線 PQ 的截距為 an 和 am；直線 RS 的截距為 $-\frac{am}{1-m}$ 和 $-\frac{an}{1-n}$。所以

$$\begin{aligned} PQ: &\quad \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=a, \\ RS: &\quad -\frac{(1-m)x}{m}-\frac{(1-n)y}{n}=a. \end{aligned}$$

由於 AC 的斜率為 1，過 A 且垂直於 AC 的直線是 $y=-x$。把 $y=-x$ 代入兩條方程：

$$\begin{aligned} PQ: &\quad x\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\Big)=a, \\ RS: &\quad x\Big(-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}-1\Big)=x\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\Big)=a. \end{aligned}$$

兩者是同一條方程。由於 $m\neq n$，括號內的值不為零，因此兩條直線都與 $y=-x$ 交於唯一一點

$$\Big(\frac{amn}{m-n},-\frac{amn}{m-n}\Big).$$

想一想 我們找到了一個同時在 PQ 和 RS 上的點。為甚麼它一定是 T？

兩條不同的直線最多只有一個交點。直線 PQ 和 RS 是不同的直線（PQ 經過 x 軸上 $x>0$ 的點 P，而 RS 與 x 軸交於 $x<0$ 的點 S）。所以兩者的任何公共點都就是它們的交點 T。因此

$$T=\Big(\frac{amn}{m-n},-\frac{amn}{m-n}\Big),$$

它位於 $y=-x$ 上。向量（vector）$\overrightarrow{AT}$ 是 $(1,-1)$ 的倍數，而 $\overrightarrow{AC}=(a,a)$，且 $(1,-1)\cdot(a,a)=0$。所以 TA 垂直於 AC，得證。

留意整個推導從未用到 $m<n$，只用到 $m\neq n$。推導也從未用到 P 和 Q 的實際位置，所以只要 $AP\neq AQ$，邊 AB 上的任意一點 P 與邊 AD 上的任意一點 Q 所得的 T，都會落在過 A 且垂直於 AC 的直線上。

作圖

面積為 $2a^2$ 的正方形，邊長為 $\sqrt{2}\,a$，正好是對角線 AC 的長度。所以我們以 AC 為一邊作正方形。用坐標表示，這個正方形的頂點為

$$A(0,0),\quad E(a,-a),\quad F(2a,0),\quad C(a,a).$$

它的各邊 $\overrightarrow{AE}=(a,-a)$、$\overrightarrow{EF}=(a,a)$、$\overrightarrow{FC}=(-a,a)$ 和 $\overrightarrow{CA}=(-a,-a)$ 長度都是 $\sqrt{2}\,a$，而且相鄰兩邊互相垂直，所以其面積為 $2a^2$。

> **想一想** 用沒有刻度的直尺，我們只能連接兩點和延長直線。這樣怎可能作出直角？

第一部分正是這樣一個方法，因為其中每一步都只是連接兩個已知點或求兩直線的交點。只用直尺：

1. 畫出對角線 AC。在 AB 上任取一點 P，在 AD 上任取一點 Q，使兩者與 A 的距離明顯不相等（無須量度；我們只需要 $AP\neq AQ$）。
2. 延長 CP 與直線 DA 交於 R，延長 CQ 與直線 BA 交於 S。延長 PQ 和 RS，交於 T。
3. 畫出直線 TA。由上面的結果，它垂直於 AC。把 CB 延長越過 B，與直線 TA 交於 E。（直線 CB 是 $x=a$，直線 TA 是 $y=-x$，所以 $E=(a,-a)$。）
4. 在對角 C 重複第 1 至 3 步：在 CD 和 CB 上取與 C 距離明顯不相等的點，進行同樣的作圖。繞正方形中心的半周旋轉（half-turn）會互換 A 和 C，並把正方形映射到自身，所以這樣得到的是過 C 且垂直於 AC 的直線，即 $x+y=2a$。
5. 把 AB 延長越過 B，與這條直線交於 $F=(2a,0)$。

於是 $AEFC$ 是邊長為 $AC=\sqrt{2}\,a$ 的正方形，所以其面積為 $2a^2$。（它的對角線 AF 和 CE 分別位於直線 AB 和 CB 上，相交於新正方形的中心 B。）

驗算

- 取 $a=1$、$m=0.3$、$n=0.6$。則 $R=(0,-1.5)$、$S=(-\frac{3}{7},0)$、$T=(-0.6,0.6)$。點 T 在通過 R 和 S 的直線上：$-\frac{0.7}{0.3}(-0.6)-\frac{0.4}{0.6}(0.6)=1.4-0.4=1$。它也在 PQ 上：$-1+2=1$。而且 T 在 $y=-x$ 上。
- 我們用電腦以分數精確計算了 R、S 和 T，對 a、m、n 作了 2000 組隨機選擇，$m<n$ 和 $m>n$ 兩種次序都有涵蓋。在每一種情況下，$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，而且所作出的 $AEFC$ 都有四條相等的邊，邊長平方為 $2a^2$，並且兩兩成直角相交。

常見錯誤

- 硬解 PQ 和 RS 的聯立方程。這樣做行得通，但很繁複。把一條候選直線（$y = -x$）分別代入兩條方程檢驗，快得多。
- 忘記解釋為甚麼公共點真的是 T。你需要說明兩條直線是不同的。
- 在作圖中「作垂線」或「截取某長度」卻沒有說明怎樣做。每一步都必須是連接兩點或求兩直線的交點。

STEP 之外

只用直尺的作圖屬於射影幾何（*projective geometry*），在其中連接與相交是僅有的運算；而像隱藏在 R、S 和 T 之中的那些比例，則透過交比（cross-ratio）和調和點列（harmonic range）來研究。彭賽列（Poncelet）和施泰納（Steiner）的一條經典定理指出：只要預先畫好一個圓及其圓心，單憑直尺就能完成直尺與圓規所能做的一切作圖；在本題中，正方形扮演了類似的角色。考克斯特（Coxeter）的 *Projective Geometry*（《射影幾何》）是這個學科一本優美的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。