詳細解答

STEP III 2010，第 4 題

純數學 • 多項式的公共根

> **STEP III 2010，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q4

關鍵思路

若 α 同時滿足兩條首項係數（leading coefficient）相同的二次方程（quadratic），那麼它亦滿足兩者之差，而 x^2 項互相抵消，只剩下一條線性（linear）方程。這樣便能確定 α，再把它代回其中一條二次方程，就得到所求條件。在第 (ii) 部分，只要先把三次多項式（cubic）除以二次多項式，同一技巧便再次奏效：在二次方程的根上，三次多項式的值與其餘式（remainder）完全相同，於是問題又回到兩條二次方程，可直接引用第 (i) 部分的結果。

解答

全文中，「根」指複數範圍內的根，因此每條二次方程都有兩個根（按重數（multiplicity）計算）。

第 (i) 部分

設 α 同時滿足兩條方程。以第一條減去第二條，得

$$(a-c)\alpha + (b-d) = 0.$$

由於 $a \neq c$，可除以 $a-c$，得

$$\alpha = -\frac{b-d}{a-c},$$

即為所求。

條件。記 $k = a - c \neq 0$ 及 $m = b - d$，則條件為 $m^2 - amk + bk^2 = 0$。

（⇒）若存在公共根（common root），由第一個結果，它必為 $\alpha = -m/k$。代入 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$，

$$\frac{m^2}{k^2} - \frac{am}{k} + b = 0,$$

再乘以 $k^2 \neq 0$，得 $m^2 - amk + bk^2 = 0$。

（⇐）設 $m^2 - amk + bk^2 = 0$，並定義 $\alpha = -m/k$。把條件除以 k^2，再把上一步倒過來看，便知 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$。另外，按 α 的取法，$(a-c)\alpha + (b-d) = k\alpha + m = 0$。因此

$$\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha^2 + a\alpha + b) - ((a-c)\alpha + (b-d)) = 0 - 0 = 0,$$

所以 α 是公共根。這就證明了在 $a \neq c$ 時兩者等價。

想一想 為甚麼單靠正方向並不足夠？

正方向只說明如果存在公共根，條件便成立。要證明「當且僅當」（if and only if），我們還必須證明條件能產生一個公共根。正因如此，我們才由條件定義 α，並驗證它同時滿足兩條方程。

去掉 $a \neq c$。設 $a = c$。此時條件變為 $(b-d)^2 = 0$，即 $b = d$。

- 若 $b = d$，兩條方程完全相同，自然有公共根（它們的兩個根都是公共根），而條件亦成立。
- 若 $b \neq d$，假如有公共根 α，相減便得 $(a-c)\alpha + (b-d) = b - d = 0$，矛盾。所以沒有公共根，而條件亦不成立。

兩種情況下，「有公共根」與「條件成立」都一致，所以**是的，即使沒有 $a \neq c$ 這個條件，結果仍然成立**。

（唯一微妙之處在於只考慮實根的情況。若 $a = c$、$b = d$ 且 $a^2 < 4b$，條件成立，但兩條相同的方程卻沒有實根。當 $a \neq c$ 時則沒有這個問題，因為對實係數而言，公共根 $-(b-d)/(a-c)$ 必然是實數。）

第 (ii) 部分

把三次多項式除以 $x^2 + ax + b$。由於 $(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$，

$$x^3 + (a+1)x^2 + qx + r = (x+1)(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b).$$

因此若在 $x = \alpha$ 處 $x^2 + ax + b = 0$，則三次多項式在該處的值為 $(q-a-b)\alpha + (r-b)$，而二次多項式

$$(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b) = x^2 + (q-b)x + r.$$

在該處的值亦然。所以 α 是該二次方程與三次方程的公共根，當且僅當它是

$$x^2+ax+b=0 \qquad \text{與} \qquad x^2+(q-b)x+r=0.$$

的公共根。現在以 $c=q-b$ 及 $d=r$ 應用第 (i) 部分。此時 $a-c=a+b-q$ 及 $b-d=b-r$，所以存在公共根當且僅當

$$(b-r)^2-a(b-r)(a+b-q)+b(a+b-q)^2=0.$$

由於無論 $a=c$ 與否，第 (i) 部分的結果都成立，這裏不需要額外條件。

例子。把兩條方程都除以 2，使它們成為首一（monic）方程：

$$x^2+\tfrac{5}{2}x+b=0, \qquad x^3+\tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}=0.$$

它們具備所需形式，其中 $a=\frac{5}{2}$（而且確實 $a+1=\frac{7}{2}$）、$q=\frac{5}{2}$ 及 $r=\frac{1}{2}$。於是 $a+b-q=b$ 及 $b-r=b-\frac{1}{2}$，條件變為

$$\left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{5}{2}\left(b-\tfrac{1}{2}\right)b+b\cdot b^2=0.$$

乘以 4：

$$\begin{aligned}(2b-1)^2-5b(2b-1)+4b^3&=0\\ 4b^3-6b^2+b+1&=0.\end{aligned}$$

觀察可知 $b=1$ 是一個根，而

$$4b^3-6b^2+b+1=(b-1)(4b^2-2b-1).$$

二次因式給出 $b=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$。所以兩條方程有公共根，當且僅當

$$b=1 \qquad \text{或} \qquad b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{或} \qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

另一方法。這裏的三次方程不含 b，所以可以直接解出。試 $x=-\frac{1}{2}$，得 $-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-\frac{5}{2}+1=0$，所以

$$2x^3+7x^2+5x+1=(2x+1)(x^2+3x+1),$$

其根為 $-\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$。公共根 x 必須滿足 $2b=-(2x^2+5x)$。當 $x=-\frac{1}{2}$ 時，得 $b=1$。至於另外兩個根，$x^2=-3x-1$，所以 $2x^2+5x=-x-2$，而 $b=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})$。這與上面的答案一致。

驗算

- 當 $b = 1$ 時，二次式 $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$ 有根 $-\frac{1}{2}$，而它是三次方程的根。
- $b = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.8090$：二次方程的根為 ≈ -0.3820 及 -2.1180，而 $-0.3820 \approx \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5})$ 是三次方程的根。
- 以電腦測試 20 000 組隨機整數 a, b, c, d（以及 a, b, q, r），結果顯示條件式恰好在兩條方程有公共複數根時為零，包括 $a = c$ 的情況。

常見錯誤

- 只證明「有公共根 $\Rightarrow$ 條件成立」，忘記證明逆命題（converse）。
- 回答 $a = c$ 的問題時說「不成立，因為我們除以了 $a - c$」。證明的確失效，但結果仍然成立，因為兩邊都化為 $b = d$。
- 未先除以 2 便應用第 (ii) 部分：公式要求方程是首一的。

STEP 之外

第 (i) 部分的表達式是兩條二次多項式的結式（resultant）：一個以係數為變量的多項式，恰好在兩個多項式有公共根時為零。結式源於西爾維斯特（Sylvester）行列式，並且是用來求解多項式方程組的消元理論（elimination theory）的基礎。第 (ii) 部分中「相除並保留餘式」的步驟，正是多項式的歐幾里得算法（Euclidean algorithm）的第一步；這個算法求兩個多項式的最高公因式（highest common factor），方法與整數的情況如出一轍。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）在這個框架下探討多項式除法與最高公因式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。