詳細解答

STEP III 2010，第 2 題

純數學 • 定積分

STEP III 2010，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q2

關鍵思路

這裏每個分母都是一個二次式（quadratic）（以 x 或 x^2 為變量），而其根原來正是 $\pm e^a$ 和 $\pm e^{-a}$。把雙曲函數（hyperbolic function）係數寫成指數形式，因式分解（factorisation）便一目了然，因為 e^a 與 e^{-a} 之積為 1，之和為 $2\cosh a$（或之差為 $2\sinh a$）。之後，部分分式（partial fractions）把一切化為對數或反正切（arctangent），而真正的功夫在於把答案整理成雙曲函數的形式。

解答

第 (i) 部分

按定義，

$$\cosh a = \tfrac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right).$$

因此 $2\cosh a = e^a + e^{-a}$ 且 $e^a \cdot e^{-a} = 1$，即

$$x^2 + 2x\cosh a + 1 = (x + e^a)(x + e^{-a}).$$

當 $x \geq 0$ 時兩個因式皆為正，所以被積函數（integrand）在 $[0, 1]$ 上連續。由於 $a > 0$，兩根 $-e^a$ 與 $-e^{-a}$ 相異，部分分式為

$$\frac{1}{(x+e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{e^a - e^{-a}}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right) = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right),$$

你可以把它重新合併來驗證：分子變成 $(x+e^a)-(x+e^{-a})=e^a-e^{-a}$。積分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} &= \frac{1}{2\sinh a}\Big[\ln\frac{x+e^{-a}}{x+e^a}\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{2\sinh a}\left(\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a}-\ln\frac{e^{-a}}{e^a}\right).\end{aligned}$$

第一個對數可以漂亮地化簡：$1+e^a = e^a(e^{-a}+1)$，所以 $\dfrac{1+e^{-a}}{1+e^a} = e^{-a}$。第二個是 $\ln e^{-2a}=-2a$。因此

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}(-a+2a) = \frac{a}{2\sinh a},$$

這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

第一個積分。 現在係數是 $2\sinh a = e^a-e^{-a}$，常數項是 $-1 = e^a\cdot(-e^{-a})$，所以

$$x^2+2x\sinh a-1 = (x+e^a)(x-e^{-a}).$$

> **想一想** 被積函數在整個範圍 $[1,\infty)$ 上都表現良好嗎？

兩根為 $-e^a<0$ 和 e^{-a}，而由於 $a>0$，有 $e^{-a}<1$。所以當 $x\ge 1$ 時兩個因式皆為正，被積函數連續。當 x 很大時，它的表現類似 $1/x^2$，所以這個瑕積分（improper integral）收斂（converges）。部分分式的做法同前，現在用 $e^a-(-e^{-a})=2\cosh a$：

$$\frac{1}{(x-e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\frac{1}{x-e^{-a}}-\frac{1}{x+e^a}\right).$$

由 1 積分至 X，再令 $X\to\infty$，

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\ln\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}-\ln\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}\right).$$

當 $X\to\infty$ 時，分數 $\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}\to 1$，所以第一個對數趨向 0。至於第二個，從分子抽出 e^{-a}：

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^a} = e^{-a}\,\frac{e^a-1}{e^a+1} = e^{-a}\tanh\tfrac{a}{2},$$

這裏用了 $\dfrac{e^a-1}{e^a+1} = \dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{e^{a/2}+e^{-a/2}} = \tanh\frac{a}{2}$（分子分母同除以 $e^{a/2}$）。所以第二個對數是 $-a+\ln\tanh\frac{a}{2}$，而

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{a-\ln\tanh\frac{a}{2}}{2\cosh a} = \frac{a+\ln\coth\frac{a}{2}}{2\cosh a}.$$

分子中兩項皆為正（因為 $0<\tanh\frac{a}{2}<1$），這正符合被積函數為正的要求。

第二個積分。 這是第 (i) 部分的二次式，只是把 x 換成 x^2：

$$x^4 + 2x^2\cosh a + 1 = (x^2 + e^a)(x^2 + e^{-a}),$$

對所有實數 x，兩個因式皆為正，所以被積函數連續；而它在無窮遠處是 $O(1/x^4)$，所以積分收斂。把 x^2 當作變量，套用同樣的部分分式，

$$\frac{1}{(x^2 + e^{-a})(x^2 + e^a)} = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x^2 + e^{-a}} - \frac{1}{x^2 + e^a}\right).$$

每一部分都是標準的反正切積分：對 $c > 0$，

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + c^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

分別取 $c = e^{-a/2}$ 和 $c = e^{a/2}$（每一部分各自收斂，所以可以把積分拆開），

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{1}{2\sinh a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sinh\frac{a}{2}}{2\sinh a}.$$

最後，二倍角公式（double-angle formula）$\sinh a = 2\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}$ 把 $\sinh\frac{a}{2}$ 約去：

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{\pi}{4\cosh\frac{a}{2}}.$$

想一想 有沒有辦法預先看出 $\cosh\frac{a}{2}$ 會出現？

有。設該積分為 I。代換（substitution）$x \mapsto 1/x$ 顯示同樣有 $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2\cosh a+1}\,\mathrm{d}x$，所以

$$2I = \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2 + 2\cosh a}\,\mathrm{d}x.$$

令 $u = x - 1/x$，則 $\mathrm{d}u = (1 + 1/x^2)\,\mathrm{d}x$ 且 $x^2 + 1/x^2 = u^2 + 2$，而 u 由 $-\infty$ 走到 ∞。分母變成 $u^2 + 2 + 2\cosh a = u^2 + 4\cosh^2\frac{a}{2}$，所以 $2I = \pi/(2\cosh\frac{a}{2})$，答案相同。

驗算

- 當 $a \to 0$ 時，第 (i) 部分變成 $\int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，而 $a/(2\sinh a) \to \frac{1}{2}$。最後一個積分變成 $\int_0^\infty (1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$，與 $\pi/(4\cosh 0)$ 吻合。
- 數值上，取 $a = 1$，辛普森法則（Simpson's rule）給出第 (i) 部分為 0.4254590641，(ii) 的第一個積分為 0.5741556186，第二個為 0.6965059227，與 $\frac{1}{2\sinh 1}$、$\frac{1-\ln\tanh\frac{1}{2}}{2\cosh 1}$ 及 $\frac{\pi}{4\cosh\frac{1}{2}}$ 在小數點後十位一致。

常見錯誤

- 把部分分式的常數弄錯：它是 $1/(\text{兩根之差})$，在第 (i) 部分是 $1/(2\sinh a)$，但在 (ii) 的第一個積分中是 $1/(2\cosh a)$。
- 忘記驗證 $e^{-a} < 1$，即分母的根位於 $[1, \infty)$ 以外。
- 把答案留在指數形式：題目要求用雙曲函數表示，所以 $\frac{e^a-1}{e^a+1}$ 應寫成 $\tanh\frac{a}{2}$。

STEP 之外

在大學裏，(ii) 的第二個積分通常用圍道積分（contour integration）來做：被積函數在 $\pm ie^{\pm a/2}$ 處有單極點（simple poles），把上半平面（upper half-plane）內的留數（residues）加起來，幾行便得出 $\pi/(4\cosh\frac{a}{2})$。同一方法也能處理 $\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1+x^n)$，以及許多用實分析方法難以攻克的積分。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）從幾何角度闡述留數及其背後的道理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。