詳細解答

STEP III 2010，第 12 題

概率與統計 • 幾何分佈的期望值

> **STEP III 2010，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q12

關鍵思路

級數 S 是一個算術幾何級數（arithmetico-geometric series），而減去 rS 這個技巧可以把它化成普通的幾何級數（geometric series）。求出 S 之後，題中每一個期望值（expectation）都正好是這種形式的和：射擊次數按線性增長，而射到那一步的概率則按幾何方式遞減。所以整道題歸結為把每個期望值寫成一個和，再讀出 r 和 d 的正確數值。

解答

級數

由於 $|r| < 1$，級數絕對收斂（converges absolutely）（其各項的絕對值不超過某常數乘以 $n|r|^n$），所以可以逐項相減。把 r 的同次冪對齊，

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+d)r + (1+2d)r^2 + (1+3d)r^3 + \cdots, \\ rS &= \qquad r + (1+d)r^2 + (1+2d)r^3 + \cdots, \end{aligned}$$

對於 $n \geq 1$，r^n 的係數之差都正好是 d。因此

$$(1-r)S = 1 + d\,(r + r^2 + r^3 + \cdots) = 1 + \frac{rd}{1-r},$$

這裏把幾何級數求和，因為 $|r| < 1$，所以這一步成立。兩邊除以 $1 - r \neq 0$，

$$S = \frac{1}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2},$$

即為所求。

Arthur 單獨射擊

假設 $0 < a \leq 1$（若 $a = 0$，Arthur 永遠射不中）。設 N 為 Arthur 所需的射擊次數。$N = n$ 當且僅當他首 $n-1$ 次都射不中，而第 n 次射中，所以由獨立性（independence）得

$$\mathrm{P}(N = n) = a'^{n-1}a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

因此

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a\, a'^{n-1} = a(1 + 2a' + 3a'^2 + \cdots).$$

括號內正是 $r = a'$、$d = 1$ 時的 S（a'^n 的係數是 $1+n$），而且 $0 \leq a' < 1$，所以

$$\mathrm{E}(N) = a\left(\frac{1}{1-a'} + \frac{a'}{(1-a')^2}\right) = a\left(\frac{1}{a} + \frac{a'}{a^2}\right) = \frac{a+a'}{a} = \frac{1}{a},$$

這裏先用了 $1 - a' = a$，再用了 $a + a' = 1$。（當 $a = 1$ 時，這條公式同樣給出 1。）

比賽：誰會勝出

以下取 $0 < a < 1$ 及 $0 < b < 1$，使得 $0 < a'b' < 1$。第 $1, 3, 5, \ldots$ 次射擊屬於 Arthur，第 $2, 4, 6, \ldots$ 次射擊屬於 Boadicea。把 Arthur 射一次、接着 Boadicea 射一次稱為一個**回合**；一個回合中無人射中的概率是 $a'b'$。

Arthur 在第 $2k+1$ 次射擊時勝出（$k = 0, 1, 2, \ldots$），當且僅當首 k 個回合都無人射中，然後 Arthur 射中。由獨立性，這事件的概率是 $(a'b')^k a$，而這些事件互斥（disjoint），所以

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a = \frac{a}{1 - a'b'}.$$

同理，Boadicea 在第 $2k+2$ 次射擊時勝出，當且僅當 k 個回合都無人射中，然後 Arthur 射不中而 Boadicea 射中，其概率是 $(a'b')^k a'b$。所以

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a'b = \frac{a'b}{1 - a'b'} = \frac{(1-a)b}{1 - (1-a)(1-b)}.$$

驗證一下：$1 - a'b' = a + b - ab = a + a'b$，所以 $\alpha + \beta = 1$，即比賽以概率 1 結束。

比賽：期望長度

設 T 為比賽中的射擊次數。由上一部分，$T = 2k+1$ 的概率是 $(a'b')^k a$，而 $T = 2k+2$ 的概率是 $(a'b')^k a'b$。記 $q = a'b'$，

$$\mathrm{E}(T) = a \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) q^k + a'b \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) q^k.$$

想一想 這兩個和怎樣套進級數 S 的形式？

第一個和是 $1+3q+5q^2+\cdots$，即 $r=q$、$d=2$ 時的 S。第二個和是 $1+2q+3q^2+\cdots$ 的兩倍，而後者是 $r=q$、$d=1$ 時的 S。所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k=\frac{1}{1-q}+\frac{2q}{(1-q)^2}=\frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k=2\left(\frac{1}{1-q}+\frac{q}{(1-q)^2}\right)=\frac{2}{(1-q)^2}.$$

因此

$$\mathrm{E}(T)=\frac{a(1+q)+2a'b}{(1-q)^2}.$$

現在與目標式比較。利用 $\alpha=a/(1-q)$ 及 $\beta=a'b/(1-q)$，

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=\frac{1}{1-q}+\frac{a'}{1-q}=\frac{(1+a')(1-q)}{(1-q)^2}.$$

所以只需證明 $a(1+q)+2a'b=(1+a')(1-q)$。利用 $1-q=a+a'b$，

$$(1+a')(1-q)=(1+a')(a+a'b)=a+aa'+a'b+a'^2b,$$
$$a(1+q)+2a'b=a+aa'(1-b)+2a'b=a+aa'-aa'b+2a'b.$$

兩者之差（第一式減第二式）是

$$a'^2b+a'b-2a'b+aa'b=a'b\,(a'+a-1)=0,$$

因為 $a+a'=1$。因此

$$\mathrm{E}(T)=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b},$$

即為所求。

驗算

- 若 $a=1$，Arthur 第一次便射中：$\alpha=1$，$\beta=0$，$\mathrm{E}(T)=1$，與 $\alpha/a+\beta/b$ 吻合。
- 若 $a=b=p$，則 $\alpha/p+\beta/p=(\alpha+\beta)/p=1/p$。這是對的：此時比賽只是一連串獨立的射擊，每次射中的概率都是 p，而由第一部分，首次射中平均需要 $1/p$ 次射擊。
- 取 $a=0.3$、$b=0.45$，得 $\alpha=0.3/0.615\approx0.4878$ 及 $\mathrm{E}(T)=1.7/0.615\approx2.764$；模擬（simulation）200 000 場比賽得出 0.486 和 2.769。

常見錯誤

- 忘記 Boadicea 只有在 Arthur 剛剛射不中時才可能勝出，於是寫成 $\beta = b/(1 - a'b')$；漏掉的因子 a' 會令 $\alpha + \beta \neq 1$，從而暴露出來。
- 數回合而不是數射擊次數：Boadicea 在第 $k+1$ 回合勝出的比賽共有 $2k+2$ 次射擊，而不是 $k+1$ 次。

STEP 之外

這類結果通常可以透過以第一回合為條件（「首步分析」（first-step analysis））更簡潔地證明：若第一回合無人射中，比賽在兩次射擊後便重新開始，所以 $\mathrm{E}(T) = a \cdot 1 + a'b \cdot 2 + a'b'\big(2 + \mathrm{E}(T)\big)$，一行便得出 $\mathrm{E}(T) = (1 + a')/(1 - a'b')$。首步分析是研究馬爾可夫鏈（Markov chains）的基本工具，通常在數學學位的第一或第二年學習。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了生成函數（generating functions）和這類論證方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。