詳細解答

STEP III 2010，第 11 題

力學 • 摩擦力與相對運動

STEP III 2010，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

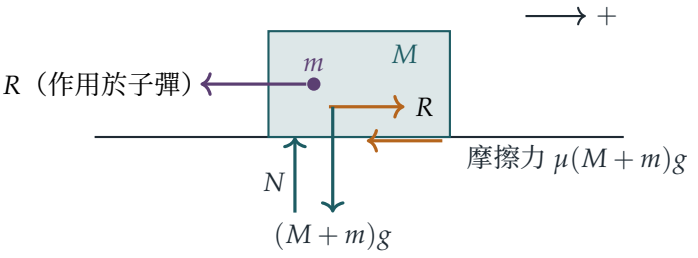
step.maths.org/questions/10-s3-q11

關鍵思路

這裏動量並不守恆（conservation of momentum），因為地面的摩擦力自始至終都作用在木塊上，所以熟悉的「子彈嵌入木塊」捷徑行不通。我們改為把子彈和木塊視為兩個獨立的質點，各自有恆定的加速度，並由大小相等、方向相反的阻力 R 聯繫起來。既然加速度恆定，*suvat* 方程便能完成所有工作，而相對運動只不過是兩者之差。

解答

我們把子彈和木塊模擬為沿水平直線運動的質點，並以子彈的運動方向為正方向。當子彈在木塊內時，木塊以力 R 向後推子彈；根據牛頓第三定律（Newton's third law），子彈亦以力 R 向前推木塊。



法向反作用力（*normal reaction*）。鉛垂方向上沒有任何物體加速。子彈由木塊承托，所以地面承受兩者的重量：$N = (M + m)g$。

摩擦力（*friction*）。由於題目給出 $R > (M + m)\mu g$，作用在木塊上的向前力 R 超過可提供的最大摩擦力 $\mu N = (M + m)\mu g$。因此木塊確實會滑動，而一旦木塊移動，摩擦力便

取其極限值（limiting value）$\mu(M+m)g$，方向向後。

第 (i) 部分

子彈所受的唯一水平力是向後的 R，所以子彈以 R/m 減速。木塊所受的向前合力為 $R-(M+m)\mu g$，所以它向前加速，加速度為

$$A=\frac{R-(M+m)\mu g}{M}>0.$$

相對於木塊，子彈的加速度為 $-\frac{R}{m}-A$，所以它相對於木塊的減速度（deceleration）大小為

$$a=\frac{R}{m}+\frac{R-(M+m)\mu g}{M},$$

此即所求。

第 (ii) 部分

相對於木塊，子彈以速率 u 開始運動，並以 a 均勻減速，所以它在以下時間後相對於木塊靜止：

$$t_1=\frac{u}{a}.$$

在那一刻，木塊的速率就是共同速率 v。木塊由靜止開始以恆定加速度 A 運動，所以

$$v=At_1=\frac{Au}{a},\qquad \text{即}\qquad av=Au=\frac{Ru-(M+m)\mu gu}{M},$$

這就是所要求的結果。

? **想一想** 為甚麼不直接用動量守恆求 v？

子彈—木塊系統的動量只有在沒有外加水平力作用時才守恆。這裏地面的摩擦力在整段時間 t_1 內都作用在木塊上，並帶走動量 $(M+m)\mu g\,t_1$。（對於真實的子彈，這段時間極短，所以 $v\approx mu/(M+m)$，但題目要求的是準確值。）

第 (iii) 部分

在時間 t_1 內，木塊由靜止均勻加速至速率 v，所以它移動的距離等於平均速率乘以時間：

$$s_1=\frac{0+v}{2}\,t_1=\frac{uv}{2a}.$$

第 (iv) 部分

當子彈不再穿過木塊時，兩者便作為一個質量為 $M+m$ 的單一物體一起運動。其重量仍為 $(M+m)g$，所以摩擦力為向後的 $\mu(M+m)g$，減速度為 μg。由速率 v 開始，它再

滑行

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

才停下（之後保持靜止，因為已沒有水平力去克服靜摩擦力（static friction））。總距離為

$$s_1 + s_2 = \frac{uv}{2a} + \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{uv}{2a} + \frac{v}{2\mu g} \cdot \frac{Au}{a} = \frac{uv}{2a\mu g}(\mu g + A),$$

其中我們對其中一個因子 v 使用了第 (ii) 部分的 $v = Au/a$。

想一想 怎樣消去 a 和 A，得出簡潔的答案？

把兩者都化成以 mM 為分母，並尋找公因子：

$$\mu g + A = \frac{M\mu g + R - (M+m)\mu g}{M} = \frac{R - m\mu g}{M},$$
$$a = \frac{MR + mR - m(M+m)\mu g}{mM} = \frac{(M+m)(R - m\mu g)}{mM}.$$

所以 $\dfrac{\mu g + A}{a} = \dfrac{m}{M+m}$，其中因子 $R - m\mu g$ 被約去（它是正數，因為 $R > (M+m)\mu g > m\mu g$）。因此木塊移動的總距離為

$$\frac{uv}{2\mu g} \cdot \frac{m}{M+m} = \frac{muv}{2(M+m)\mu g},$$

此即所求。

$R < (M+m)\mu g$ 的情況

此時作用在木塊上的向前推力 R 小於極限摩擦力 $(M+m)\mu g$，所以靜摩擦力足以使木塊保持不動：木塊始終不會移動。子彈只是在靜止的木塊內以 R/m 減速，在穿入距離 $\dfrac{mu^2}{2R}$ 後停下（假設木塊足夠厚），而木塊自始至終都留在原位。

驗算

- 取 $m = 0.02\,\mathrm{kg}$、$M = 2\,\mathrm{kg}$、$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$\mu = 0.5$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $R = 1000\,\mathrm{N}$。則 $a \approx 50\,495\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，$v \approx 2.941\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$s_1 \approx 0.0087\,\mathrm{m}$，$s_2 \approx 0.8827\,\mathrm{m}$，以及 $s_1 + s_2 \approx 0.8914\,\mathrm{m}$，與 $muv/\big(2(M+m)\mu g\big)$ 相符。對兩個質點作逐步數值模擬，亦得出相同的 v 和總距離。
- 當 $R \to \infty$（即瞬間碰撞）時，$v = Au/a \to mu/(M+m)$，正是動量守恆給出的答案，理應如此。
- 量綱（dimensions）：$muv/\big((M+m)\mu g\big)$ 的量綱是 (速率)^2/(加速度)，即長度。

常見錯誤

- 對木塊使用 $N = Mg$，忘記嵌入其中的子彈的重量同樣由地面承受。
- 在撞擊過程中使用動量守恆，忽略了摩擦力的衝量。
- 把 R 當作木塊所受的合力，而不是 R 減去摩擦力。

STEP 之外

衝量（impulse）可以為整個運動提供一個快速的一致性檢驗：由於系統最終靜止，在木塊移動的整段時間內，地面摩擦力的衝量必須等於子彈的初始動量 mu。把系統分拆成幾部分，用牛頓第三定律追蹤內力，並仔細處理外力，是大學一年級力學的核心技巧，並會引伸至質心參考系（centre-of-mass frame）和非彈性碰撞（inelastic collisions）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）發展了這些概念，書中有很多正是這類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。