詳細解答

STEP III 2010，第 10 題

力學 • 微小振動

> **STEP III 2010，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q10

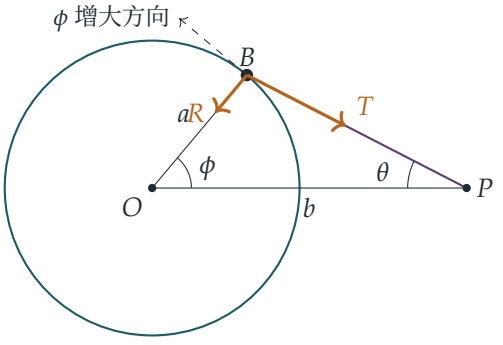
關鍵思路

珠子（bead）被限制在圓環上運動，所以只有沿圓環切線（tangent）方向的力分量會改變它的運動；法向反作用力（normal reaction）以及重力（由圓環的豎直反作用力抵消）完全不會出現在方程中。其餘一切都是三角形 OBP 的幾何。正弦定理（sine rule）把這幾何關係轉化為弦的長度；在角度很小時，它又給出第二部分所要求的 θ 與 ϕ 之間的線性關係。

解答

運動方程

把珠子視為光滑圓環上的質點，把弦視為輕而有彈性的弦。取 P 在正 x 軸上，並以逆時針方向量度 ϕ，使 B 位於與 OP 成角 ϕ 的位置，如圖所示。在三角形 OBP 中，O 處的角為 ϕ，P 處的角為 θ，因此 B 處的角為 $\pi - \theta - \phi$。



設 $l = BP$。在三角形 OBP 中應用正弦定理，

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\theta+\phi)},$$

這裏用了 $\sin(\pi-\theta-\phi) = \sin(\theta+\phi)$。特別地，$l = \dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta}$。

弦在整個運動過程中都是拉緊的，因為 B 與 P 的最短距離是 $b-a$，而 $b-a > c$。所以由胡克定律（Hooke's law），張力（tension）為

$$T = \frac{\lambda(l-c)}{c} = \lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right).$$

在水平面內的力有沿 BP 的張力 T，以及光滑圓環沿半徑 OB 方向的法向反作用力 R。（在豎直方向，重量由反作用力的豎直部分抵消。）珠子在半徑為 a 的圓上運動，所以它沿切線方向（取 ϕ 增大的方向）的加速度為 $a\ddot{\phi}$。只有 T 有切向分量。

弦 BP 與向內的半徑 BO 成角 $\pi-\theta-\phi$，所以它與向外的半徑成角 $\theta+\phi$，其沿切線的分量大小為 $T\sin(\theta+\phi)$。這個分量指向 P，即 ϕ 減小的方向。沿切線分解，

$$ma\ddot{\phi} = -\lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right)\sin(\theta+\phi),$$

即為所求。（當 $\phi < 0$ 時，圖形關於 OP 作反射；此時 $\theta < 0$ 亦成立，而以有向角計算，同一方程仍然成立。）

微小振動

正弦定理給出精確關係 $a\sin(\theta+\phi) = b\sin\theta$。當 θ 和 ϕ 都很小時，兩邊都有 $\sin x \approx x$，所以

$$a(\theta+\phi) \approx b\theta.$$

因此 $\theta \approx \dfrac{a\phi}{b-a}$，以及 $\theta+\phi \approx \dfrac{b\theta}{a} \approx \dfrac{b\phi}{b-a}$。

> ? **想一想** 當兩個角都趨於零時，$\dfrac{a\sin\phi}{c\sin\theta}$ 會怎樣？它看起來像 $0/0$。

這個商其實就是 l/c，而當 B 趨近平衡位置（equilibrium）時，長度 l 趨於 $b-a$。等價地，由上面的關係可得 $\dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta} \approx \dfrac{a\phi}{\theta} \approx b-a$。所以在首階近似（leading order）下，張力就是常數的平衡張力

$$T_0 = \lambda\left(\frac{b-a}{c} - 1\right) = \frac{\lambda(b-a-c)}{c},$$

由於 $c < b-a$，它是正數。因子 $\sin(\theta+\phi)$ 本身已經很小，所以 T 的任何修正項只會在二階才有貢獻。

代入運動方程並保留一階項，

$$ma\ddot{\phi} \approx -\frac{\lambda(b-a-c)}{c}\cdot\frac{b\phi}{b-a}, \qquad \text{所以} \qquad \ddot{\phi} = -\omega^2\phi, \quad \omega^2 = \frac{\lambda b(b-a-c)}{mac(b-a)}.$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），而在 $\theta = \phi = 0$ 附近微小振動的週期（period）為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mac(b-a)}{\lambda b(b-a-c)}}.$$

驗算

- 量綱（dimensions）：λ 是力，所以 $mac(b-a)/(\lambda b(b-a-c))$ 的量綱是 $\mathrm{M}\,\mathrm{L}/(\mathrm{M}\,\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-2}) = \mathrm{T}^2$，正是週期應有的量綱。
- 當 $c \to b-a$ 時，平衡張力消失，週期變成無限大：鬆弛的弦不提供恢復力（restoring force），這是合理的。
- 數值上，取 $a = 1$、$b = 2.5$、$c = 0.7$、$\lambda = 3$、$m = 0.5$，公式給出週期 1.8586。從一個微小位移出發，以數值方法逐步推進精確的運動（力直接由 B 的位置計算），得出的值在六位有效數字內相同。在隨機選取的位置上，精確的運動方程亦與直接的向量分解結果吻合。

常見錯誤

- 符號弄錯：切向拉力指向 P，即指向 $\phi = 0$，所以它必須帶負號。
- 以為平衡時張力為零。在平衡位置，弦被拉長至長度 $b-a > c$，所以張力是 $\lambda(b-a-c)/c$，而正是這個張力提供恢復力。
- 使用 $\theta + \phi \approx \phi$。這裏 θ 與 ϕ 同階，把它略去會得出錯誤的週期。

STEP 之外

這裏的方法是求微小振動頻率的標準做法：找出平衡位置，把運動方程在其附近線性化（linearise），然後讀出 ω^2。一個巧妙之處是，恢復力完全來自平衡張力透過弦方向的改變而產生的作用，這與繃緊的結他弦是同一機制。在大學一年級的課程中，這會發展為拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）和簡正模（normal modes）；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是細心學習微小振動分析的好地方。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。