詳細解答

STEP II 2010，第 9 題

力學 • 相撞的拋體

STEP II 2010，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

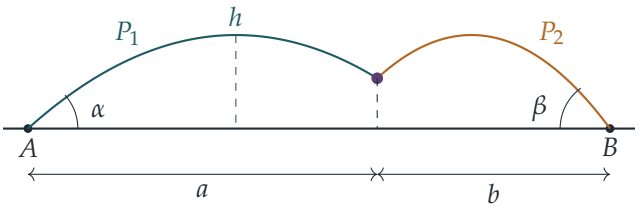
step.maths.org/questions/10-s2-q9

關鍵思路

兩粒同時拋出的質點以相同的加速度 g 下落，所以要令兩者在碰撞一刻的高度相等，唯一的可能是它們的初始豎直速度相等。這樣兩者的豎直運動便完全一樣：最大高度同為 h，在同一時刻到達，而且（若沒有碰撞）會在同一時刻落地。碰撞發生在飛行最高點與落地之間，而每粒質點走過的水平距離與時間成正比，因此這段距離被夾在兩個簡單的界限之間。

解答

我們把兩粒質點都視為只受重力 g 作用、自由運動的拋射體（projectile），並忽略空氣阻力（air resistance）。設 P_1 的速率為 u，P_2 的速率為 v，取拋出時刻為 $t = 0$，並設碰撞發生於時刻 $t_c > 0$。



相同的豎直運動

在時刻 t，P_1 與 P_2 的高度分別為

$$y_1 = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad y_2 = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

碰撞時 $y_1 = y_2$，故 $(u\sin\alpha - v\sin\beta)\,t_c = 0$；由於 $t_c > 0$，

$$u\sin\alpha = v\sin\beta.$$

因此兩粒質點的豎直運動完全相同。特別地，兩者在同一時刻 T 到達相同的最大高度 h，其中

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g},$$

而且兩者都會在時刻 $2T$ 回到地面。

想一想 「在空中」和「在 P_1 到達其最大高度之後」這兩個條件，告訴了我們關於 t_c 的甚麼資訊？

P_1 在時刻 T 位於最高點，所以「之後」給出 $t_c > T$。兩粒質點只在 $0 < t < 2T$ 期間位於地面之上，所以要在空中碰撞，便需要 $t_c < 2T$。因此

$$T < t_c < 2T.$$

b 的界限

在水平方向上，P_2 以恆定速率 $v\cos\beta$ 運動，所以 $b = v\cos\beta\, t_c$。在時刻 T，它走過的水平距離會是

$$v\cos\beta\, T = \frac{v^2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g}\cdot\frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 2h\cot\beta.$$

因此

$$b = v\cos\beta\, T\cdot\frac{t_c}{T} = 2h\cot\beta\cdot\frac{t_c}{T},$$

又由於 $1 < t_c/T < 2$，且 $2h\cot\beta > 0$（因為 β 是銳角），

$$2h\cot\beta < b < 4h\cot\beta,$$

得證。

a 的界限

完全同理，$a = u\cos\alpha\, t_c$，而

$$u\cos\alpha\, T = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2h\cot\alpha,$$

所以 $a = 2h\cot\alpha\cdot t_c/T$，再由 $1 < t_c/T < 2$ 得

$$2h\cot\alpha < a < 4h\cot\alpha.$$

這裏用的是同一個 h：按定義，h 是 P_1 的最大高度；而由於兩者的豎直運動完全相同，它同時也是 P_2 的最大高度。

驗算

- 邊界情況：若碰撞恰好發生在最高點（$t_c = T$），則 $a = 2h\cot\alpha$，即熟悉的半射程（half-range）$\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$；若碰撞發生在落地一刻（$t_c = 2T$），則 $a = 4h\cot\alpha$，即全射程 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$。題目中的嚴格不等式正好介乎兩者之間。
- 數值驗證：取 $g = 9.8$、$u = 20$、$\alpha = 0.7$、$\beta = 0.9$（弧度），$v = u\sin\alpha/\sin\beta$ 及 $t_c = 1.5T$，得 $h \approx 8.470$ 及 $a \approx 30.17$，介乎 $2h\cot\alpha \approx 20.11$ 與 $4h\cot\alpha \approx 40.22$ 之間（事實上它恰好等於 1.5×20.11）。我們用這個方法測試了 20 000 個隨機設定，逐步模擬 P_1 的運動以確認 h，並檢查兩粒質點確實重合。

常見錯誤

- 把兩粒質點到達碰撞點的時間當作不同：它們是同時拋出的，所以兩者用的是同一個 t_c。
- 忘記解釋上界的由來：上界來自碰撞發生在空中，即在共同落地時刻 $2T$ 之前。

STEP 之外

關鍵的一步是轉換參考系（frame of reference）：在一個以加速度 g 自由下落的參考系中，兩粒質點都以恆定速度沿直線運動，所以只有當它們在該參考系中互相瞄準時才會碰撞，這正是經典的「猴子與獵人」（monkey and hunter）問題的思路。以加速參考系思考問題，以及當加速度不均勻時隨之出現的慣性力（fictitious forces），是大學一年級力學的核心主題。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）討論了拋射體、相對運動及非慣性參考系（non-inertial frames），並附有大量優秀習題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。