詳細解答

STEP II 2010，第 8 題

純數學 • 曲線之間的面積

> **STEP II 2010，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q8

關鍵思路

由於 $\sin x \leq 1$，曲線 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ 永遠不會高於 $y = \mathrm{e}^{-x}$；兩者恰好在 $\sin x = 1$ 之處相遇，而且在該處只是相切（touch）。因此每一塊面積都只是 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ 在相鄰兩個切點之間的單一積分，毋須擔心正負號改變。$\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的積分是標準的「分部積分兩次」題型，而由於積分上下限全都是 $\sin x = 1$ 及 $\cos x = 0$ 的點，反導數（antiderivative）在這些點上會化簡成非常簡單的式子。

解答

草圖

C_1 是大家熟悉的衰減指數函數（decaying exponential），由 $(0,1)$ 開始，遞減並趨向 0。C_2 是一條阻尼正弦波（damped sine wave）：它由原點開始，在 π 的每個倍數處都等於零，而且因為 $-1 \leq \sin x \leq 1$，它被夾在 $y = \mathrm{e}^{-x}$ 與 $y = -\mathrm{e}^{-x}$ 之間。振盪幅度收縮得非常快；第一個負向凹陷的深度已只有約 0.014（在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 處）。

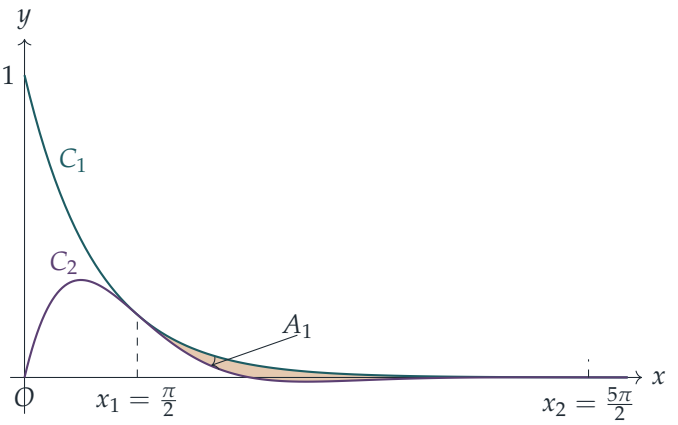
兩條曲線在哪裏相遇？由於 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，

$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x} \iff \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

在這些點上，兩條曲線相切而非相交：C_2 處處位於 C_1 之上或之下。事實上，兩者在該處的斜率（gradient）亦相同，因為

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}\sin x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \text{當 } \sin x = 1,\ \cos x = 0.$$

留意 C_2 的第一個極大值在 $x = \frac{\pi}{4}$（即 $\cos x = \sin x$ 之處），早於在 $x = \frac{\pi}{2}$ 的第一個切點：草圖應顯示 C_2 先到達峯頂，然後回落，與 C_1 相切。



面積 A_n

第 n 個切點是方程 $\sin x = 1$ 在 $x > 0$ 時的第 n 個解：

$$x_n = \tfrac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi = \tfrac{(4n-3)\pi}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n + 2\pi.$$

在 x_n 與 x_{n+1} 之間，有 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x) \geq 0$，所以 C_1 在整段區間都是上邊界，因此

$$A_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣求 $\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的積分？

進行兩次分部積分（integration by parts），便會回到原本的積分。設 $I = \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。先取 $u = \sin x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分，再取 $u = \cos x$ 做一次，

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

所以 $2I = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$，而 $I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + c$。（你可以透過求導來驗證。）

因此 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ 的一個反導數是

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x).$$

巧妙之處來了：在每個切點上都有 $\sin x = 1$ 及 $\cos x = 0$，所以在這些點上

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

因此，利用 $x_{n+1} = x_n + 2\pi$，

$$\begin{aligned} A_n = F(x_{n+1}) - F(x_n) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1). \end{aligned}$$

最後，$x_n + 2\pi = \frac{(4n-3)\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$，所以

$$A_n = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-(4n+1)\pi/2},$$

此即所求。

無窮級數之和

由公式可見 $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-2\pi}A_n$，所以各面積組成一個幾何級數（geometric series），首項為 $A_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}$，公比（common ratio）為 $r = \mathrm{e}^{-2\pi}$。由於 $0 < r < 1$，該級數收斂（converges），而且

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}}{\mathrm{e}^{-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

驗算

- 總和就是 x_1 右方兩曲線之間的全部面積，所以它應等於 $\int_{\pi/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} F(X) - F(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$。結果的確如此，而且完全不需要用到級數。
- 數值上，$A_1 \approx 0.10375$，而 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.10394$：正如草圖所示，幾乎全部面積都在第一個區域內，因為 $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.0019$。對 $\mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ 上使用辛普森法則（Simpson's rule），得到相同的 0.103746。

常見錯誤

- 誤以為切點就是 C_2 的極大值點。極大值在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$；兩曲線則在 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 相切。
- 把 $\sin x = \pm 1$ 的每個解都算進去，或把 $\sin x = 1$ 的解當作相隔 π：相鄰兩個切點相隔 2π。
- 計算 $\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ 時弄錯正負號。把答案求導來檢查一下。

STEP 之外

曲線 C_2 是阻尼振盪的形狀，即有摩擦的彈簧的運動，而包絡線（envelope）$\pm \mathrm{e}^{-x}$ 決定了振盪衰減的快慢。像 $\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ 這類積分，若視為 $\int \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} \, \mathrm{d}x$ 的虛部（imaginary part）來計算，會快得多；這個技巧在大學一年級的微分方程（differential equations）及拉普拉斯變換（Laplace transforms）課程中經常用到。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）詳細討論了阻尼振盪。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。