詳細解答

STEP II 2010，第 7 題

純數學 • 三次方程

> **STEP II 2010，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q7

關鍵思路

首項係數（leading coefficient）為正的三次曲線，當且僅當它的兩個轉向點（turning points）位於軸的同一側時，才只與軸相交一次。第 (ii) 部分是解不含 x^2 項三次方程的經典技巧：選取代換 $x = u + q/u$，使 x^3 中的交叉項與 $-3qx$ 互相抵消，剩下一條關於 u^3 的二次方程。而第 (iii) 部分原來是同一條三次方程換了個樣子，只是以 p 代替 x。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = x^3 - 3qx - q(1+q)$。則 $f'(x) = 3x^2 - 3q$，它在 $x = \pm\sqrt{q}$ 處為零（由於 $q > 0$，兩者均為實數）。由於 $f''(x) = 6x$，$x = -\sqrt{q}$ 處的點是局部極大點（local maximum），而 $x = \sqrt{q}$ 處的點是局部極小點（local minimum）。

在局部極大點，

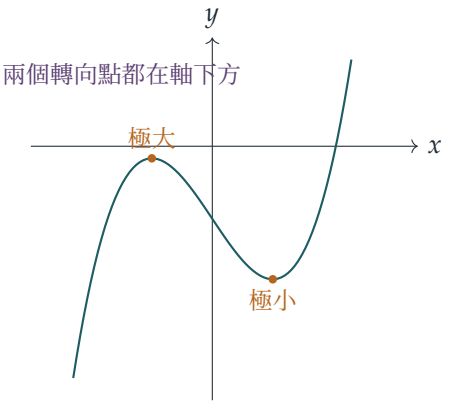
$$\begin{aligned} f(-\sqrt{q}) &= -q\sqrt{q} + 3q\sqrt{q} - q - q^2 \\ &= -q(q - 2\sqrt{q} + 1) \\ &= -q(\sqrt{q} - 1)^2. \end{aligned}$$

由於 $q > 0$ 且 $q \neq 1$（因此 $\sqrt{q} \neq 1$），此值嚴格小於零。局部極小值更低：

$$f(\sqrt{q}) = q\sqrt{q} - 3q\sqrt{q} - q - q^2 = -2q\sqrt{q} - q - q^2 < 0.$$

所以兩個轉向點都在 x 軸下方。當 $x < \sqrt{q}$ 時，曲線永遠不會高於其局部極大值，而該值為負，因此曲線在此範圍內不與軸相交。當 $x > \sqrt{q}$ 時，函數嚴格遞增，由負值增至

$+\infty$，因此恰好與軸相交一次。故此曲線只與 x 軸相交一次。



第 (ii) 部分

用二項式定理（binomial theorem）將 $x = u + q/u$ 立方，

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{q}{u} + 3u \cdot \frac{q^2}{u^2} + \frac{q^3}{u^3} \\ &= u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3q\left(u + \frac{q}{u}\right) = u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3qx. \end{aligned}$$

所以 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$，三次方程變為

$$u^3 + \frac{q^3}{u^3} = q(1+q).$$

兩邊乘以 u^3（注意代換要有意義，須有 $u \neq 0$），得 u^3 所滿足的二次方程

$$(u^3)^2 - q(1+q)\,u^3 + q^3 = 0.$$

想一想 這條二次方程怎樣因式分解？

兩根之和必須為 $q + q^2$，兩根之積為 $q^3 = q \cdot q^2$，所以兩根是 q 和 q^2：

$$(u^3 - q)(u^3 - q^2) = 0.$$

取實數立方根，得 $u = q^{1/3}$ 或 $u = q^{2/3}$。兩者給出相同的 x：

$$q^{1/3} + \frac{q}{q^{1/3}} = q^{1/3} + q^{2/3}, \qquad q^{2/3} + \frac{q}{q^{2/3}} = q^{2/3} + q^{1/3}.$$

直接驗證：設 $s = q^{1/3}$ 及 $x = s + s^2$，則 $x^3 = s^3 + 3s^4 + 3s^5 + s^6$ 而 $3qx = 3s^4 + 3s^5$，所以 $x^3 - 3qx = s^3 + s^6 = q(1+q)$。由第 (i) 部分，當 $q > 0$、$q \neq 1$ 時，此三次方程只有一個實根，所以該實根為

$$x = q^{1/3} + q^{2/3}.$$

第 (iii) 部分

由於 $\alpha+\beta=p$ 及 $\alpha\beta=q$，

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3qp,$$

此即所求。

若其中一根是另一根的平方，則 $\alpha^2=\beta$ 或 $\beta^2=\alpha$，因此無論哪種情況都有

$$(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)=0.$$

這個式子關於 α 和 β 對稱（symmetric），所以可以用 p 和 q 表示。展開得

$$\begin{aligned}(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)&=\alpha^2\beta^2-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha\beta\\&=q^2-(p^3-3qp)+q.\end{aligned}$$

令此式等於零，得到關係式

$$p^3-3qp-q(1+q)=0.$$

這正是第 (ii) 部分的三次方程，只是以 p 代替 x。當 $q>0$、$q\neq1$ 且 p 為實數時，p 必然是它唯一的實根，所以

$$p=q^{1/3}+q^{2/3}.$$

這是合理的：此時兩根為 $\alpha=q^{1/3}$ 及 $\beta=q^{2/3}=\alpha^2$，其和為 p，其積為 q。

驗算

取 $q=8$：第 (ii) 部分給出 $x=2+4=6$，而確實 $216-144-72=0$。在第 (iii) 部分，$p=6$ 給出 $t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$，且 $4=2^2$。我們用電腦對數以千計的隨機 q 驗證了 (i) 中兩個轉向點的函數值，對隨機複數 u 驗證了恆等式 $x^3-3qx=u^3+q^3/u^3$，並確認 $p=q^{1/3}+q^{2/3}$ 總是給出一對其中一根為另一根平方的根。

常見錯誤

- 在 (i) 中只檢查局部極小值為負。單憑這一點，曲線仍可能與軸相交三次；關鍵在於局部極大值為負，而這正是用到 $q\neq1$ 的地方。
- 在 (ii) 中擔心 u^3 的兩個值會給出兩個不同的根。它們給出相同的 x，這是必然的，因為 u 和 q/u 的地位是對稱的。

STEP 之外

(ii) 中的代換是一般三次方程的卡爾達諾公式（Cardano's formula）的核心，也正是在這裏，複數（complex numbers）在數學中首次變得無可迴避：當三次方程有三個實根時，關於 u^3 的二次方程反而有複數根。被排除的情況 $q = 1$ 是一個很好的例子。此時 $p = -1$ 也是允許的，而 $t^2 + t + 1 = 0$ 的根是 ω 和 ω^2，即單位的複數立方根（complex cube roots of unity），兩者互為對方的平方。至於多項式方程何時可以用根式（radicals）求解，完整的故事就是伽羅瓦理論（Galois theory），Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）對此有很好的講述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。