詳細解答

STEP II 2010，第 6 題

純數學 • 正四面體的幾何

STEP II 2010，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

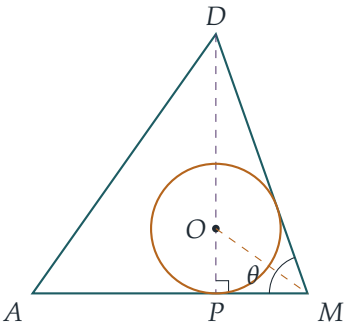
step.maths.org/questions/10-s2-q6

關鍵思路

正四面體（regular tetrahedron）的對稱性極高，幾乎所有事情都發生在同一個鉛垂截面（cross-section）上：通過一條棱的中點、其對頂點和頂尖的那個平面。在這個平面內，每個立體問題都化為一個直角三角形。至於球，對稱性告訴我們球心必定在哪裏，而第 (ii) 部分求得的角則告訴我們球心與每個面相距多遠。

解答

以下一律設 M 為 BC 的中點。每個面都是邊長為 1 的等邊三角形，所以每條中線（median）（例如 AM 或 DM）的長度為 $\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。



第 (i) 部分

由於 D 與 A、B、C 等距，而 DP 垂直於平面 ABC，由畢氏定理（Pythagoras' theorem）得 $PA^2 = DA^2 - DP^2 = DB^2 - DP^2 = PB^2$，同理 $PB = PC$。所以 P 是等邊三角形

ABC 的外心（circumcentre），亦即它的形心（centroid）。形心位於每條中線上由頂點起計三分之二的位置，所以

$$PA = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad PM = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}.$$

然後，由三角形 DPA 中位於 P 的直角，得

$$PD^2 = DA^2 - PA^2 = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \qquad \text{所以} \qquad PD = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

第 (ii) 部分

六條棱的情況完全相同（四面體的對稱變換可以把任何一條棱移到任何另一條棱上），所以只需求出面 ABC 與面 DBC 之間的夾角 θ，這兩個面相交於 BC。

? **想一想** 圖中哪一個角才*真正*是這兩個面之間的夾角？

兩個平面相交於一條直線時，它們的夾角要用兩條直線來量度：兩條直線各在一個平面內，並且在同一點上垂直於交線。在等邊三角形 ABC 中，中線 AM 垂直於 BC；在等邊三角形 DBC 中，中線 DM 垂直於 BC。所以 $\theta = \angle AMD$，而由於 P 在 AM 上，介乎 A 與 M 之間，故亦有 $\theta = \angle PMD$。

三角形 DPM 在 P 處有一直角，其中 $PM = \frac{1}{2\sqrt{3}}$，斜邊 $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$。因此

$$\cos\theta = \frac{PM}{DM} = \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3},$$

正如所求。（作為驗算，$PD^2 = DM^2 - PM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$，與第 (i) 部分吻合。）

第 (iii) 部分

最佳的球。設 O 為 DP 上滿足 $OP = r$ 的點，其中 r 有待求出，使得 O 與三個斜面的距離也同樣是 r。根據對稱性，只需處理面 DBC。

平面 AMD 垂直於 BC（它包含 AM 和 DM，兩者都垂直於 BC），所以它垂直於面 DBC，而由 O 到該面的垂線就在這個截面之內：它就是由 O 到直線 MD 的垂線。由於 O 與直線 MP 的距離為 OP，與直線 MD 的距離為 r，而我們想這兩個距離相等，所以 O 必須在 M 處的角 θ 的角平分線（bisector）上。於是

$$r = PM\tan\tfrac{\theta}{2}.$$

由第 (ii) 部分，利用 $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$，

$$\tan^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\tfrac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

（取正值，因為 θ 是銳角）。因此

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

以 O 為球心、半徑為 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ 的球與四個面全部相切，而且位於四面體之內，因為 O 是一個內點，與每個面的距離都至少為 r。

想一想 我們怎樣知道，無論把球放在哪裏，都不可能比這個球更大？

再大就放不下。在四面體內任取一點 X，設它與四個面的距離為 d_1, d_2, d_3, d_4。把 X 與各頂點連起來，便將四面體分成四個棱錐（pyramid），每個面上各有一個，每個的底面積都是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$。把它們的體積相加，

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} (d_1 + d_2 + d_3 + d_4).$$

但取 $X = D$（此時三個距離為 0，餘下一個為 PD）可知 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} PD$。因此對每一個內點都有

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = PD = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

以 X 為球心、半徑為 ρ 的球，只有在每個 $d_i \geq \rho$ 時才能放在四面體之內，所以 $4\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$。所以最大的球的半徑為

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} = \tfrac{1}{4} PD,$$

等號恰好在四個距離全部相等時（即在 O 處）成立。

驗算

- 坐標：取 $A = (0,0,0)$、$B = (1,0,0)$、$C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$、$D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{2/3})$，則六條棱的長度全為 1，而 $PD \approx 0.8165$。
- 任意兩個面的向外單位法向量（unit normal）的點積（dot product）為 $-\frac{1}{3}$，印證了 $\cos\theta = \frac{1}{3}$（約 70.5°）。
- 點 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$ 與四個面的距離全為 $0.20412\ldots = \frac{\sqrt{6}}{12}$。隨機選取的內點，其距離之和總是 $0.8165\ldots$，而其中最小的距離從不超過 0.2041。
- 球心位於 PD 上由底部起計四分之一的高度。這與以下事實吻合：正四面體的內心（incentre）就是它的形心，而形心位於由一個面到其對頂點的四分之一處。

常見錯誤

- 把 $\angle DAM$ 或 $\angle DBA$ 當作兩個面之間的夾角。所用的兩條直線必須都垂直於公共棱，而 DM 和 AM 正是如此。
- 把 PA 當作中線的一半，而不是中線的三分之二。
- 求出了與四個面相切的球，卻沒有說明為何放在別處的球不可能更大。距離之和的恆等式只需兩行便可解決這一點。

STEP 之外

到各個面的距離之和為常數，這是等邊三角形的維維亞尼定理（Viviani's theorem）的三維版本。它源自重心坐標（barycentric coordinates），即把單純形（simplex）內任何一點表示為其頂點的加權平均。角 $\arccos\frac{1}{3}$ 在化學中也會出現：甲烷中鍵與鍵之間的夾角是 $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.5°$，亦即同一個四面體的兩個頂點在中心所張的角。想看更多這類立體推理，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；若想了解運用點積和叉積（cross product）的向量方法，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。