詳細解答

STEP II 2010，第 5 題

純數學 • 向量夾角與圓錐

> **STEP II 2010，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q5

關鍵思路

這一題的一切都歸結為一個事實：方向為 $\mathbf{d}$ 的直線與向量（vector）$\mathbf{a}$ 之間的夾角 θ 滿足 $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{a}|}$。「傾角相等」和「傾角為 α」都可以直接化為關於 $\mathbf{d}$ 各分量（components）的方程。至於最後一部分，留意那個笛卡兒方程（Cartesian equation）與你剛剛求得的關係式形狀相同。通過 O 而與某條固定直線成相同夾角的所有直線，合起來就是一個圓錐（cone）。

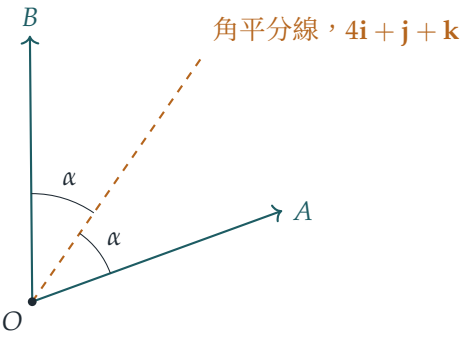
解答

設 $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$，則 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ 而 $|\mathbf{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$。另外 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5-1-1 = 3$。因此

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

由於 $\cos 2\alpha > 0$，角 2α 是銳角，所以 α 介乎 0 與 $\frac{\pi}{4}$ 之間。稍後我們會用到

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \tfrac{2}{3}.$$



（此圖只是平面 OAB 的示意圖。）

第 (i) 部分

設 $\mathbf{d} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ 為 L_1 的方向。$\mathbf{d}$ 與 OA 及 OB 所成夾角的餘弦分別是

$$\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\sqrt{3}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|} \qquad 及 \qquad \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\,3\sqrt{3}} = \frac{5m-n-p}{3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|}.$$

由於 cos 在 $[0,\pi]$ 上是一對一（one-to-one）的，夾角相等即餘弦相等。兩邊同乘 $3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|$，得

$$3(m+n+p) = 5m-n-p \quad \Longleftrightarrow \quad m = 2(n+p).$$

? **想一想** 直線本身並沒有指定的方向。假如直線與 OA 成角 θ，但與 OB 成角 $\pi-\theta$，那又如何？

如果我們把「兩條直線之間的夾角」理解為銳角的那一個，那麼兩個餘弦只需在相差一個正負號的意義下相等。取另一個符號，得 $3(m+n+p) = -(5m-n-p)$，即 $4m+n+p=0$。這些直線位於通過 O 且垂直於角平分線的平面上，而該平面包含 $\angle AOB$ 的外角平分線（external bisector）。題目預期的答案是 $m = 2(n+p)$，但知道還有第二族直線存在，也是值得的。

要求 $\angle AOB$ 的角平分線（bisector），我們把沿 OA 和 OB 方向的單位向量（unit vector）相加。兩個單位向量之和平分它們之間的夾角，因為它們張成一個菱形（rhombus）。所以

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3\sqrt{3}},$$

於是可取 $m=4$、$n=1$、$p=1$（或其任何非零倍數）。驗算一下：$4 = 2(1+1)$，所以這個方向滿足上面的關係式。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{e} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 為 L_2 的方向。這條直線與 OA 成角 α，當且僅當

$$\frac{u+v+w}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm\cos\alpha.$$

這裏的 $\pm$ 顧及了沿直線的兩個指向。平方後正負號消失，再利用 $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$，得

$$(u+v+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2).$$

把左邊展開為 $u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv)$ 並整理，便得到關係式

$$u^2+v^2+w^2 = 2(vw+wu+uv).$$

? **想一想** 一個關於方向的條件，怎樣變成一個曲面？

任取一點 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$。它恰好位於一條通過 O 的直線上，即方向為 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 的那條直線。根據第 (ii) 部分，該點滿足

$$x^2+y^2+z^2 = 2(yz+zx+xy)$$

當且僅當它所在的那條通過 O 的直線與 OA 成角 α。原點也滿足這個方程。因此，這個曲面（surface）就是所有通過 O 且與直線 OA 成傾角 α 的直線的併集。

這是一個**（雙葉）直立圓錐（right circular cone）**，頂點在原點，軸為直線 $x=y=z$（即直線 OA）。它的半頂角（semi-vertical angle）α 滿足

$$\cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \tan\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha \approx 35.3^\circ,$$

即 $\angle AOB$ 的一半。它有兩葉（nappes），因為 μ 取遍所有實數。第 (i) 部分的角平分線位於這個圓錐上：對於 $(4,1,1)$，我們有 $16+1+1 = 18 = 2(1+4+4)$。

驗算

- 點 $(1,1,0)$ 滿足 $2 = 2(0+0+1)$。它與 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 的夾角的餘弦為 $2/(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2/3}$，與預期相符。
- 數值上，$\arccos(1/3)/2 = 0.61548\,\text{rad}$，而角平分線 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 與 OA 和 OB 所成的角都是 $0.61548\,\text{rad}$。
- 恆等式 $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy) = (x^2+y^2+z^2)(2-3c^2)$ 成立，其中 c 是與 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 所成夾角的餘弦。所以左邊等於零，當且僅當 $c^2 = \frac{2}{3}$。

常見錯誤

- 用 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 來求角平分線，而不是用單位向量之和。由於 $|\mathbf{b}| \neq |\mathbf{a}|$，$\mathbf{a}+\mathbf{b} = 6\mathbf{i}$ 並不是角平分線。
- 使用 $\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ 或類似的式子。這裏需要的是倍角公式（double-angle formula）$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$。
- 只把曲面描述為「一個圓錐」，而沒有指出它的頂點、軸和半頂角。

STEP 之外

這個圓錐的方程是一個二次型（quadratic form）：$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} M\mathbf{x} = 0$，其中 M 是對稱矩陣（symmetric matrix）。在大學一年級的線性代數（linear algebra）中，你會按 M 的特徵值（eigenvalues）為這類曲面分類。這裏 M 的對角線元素為 1，非對角線元素為 -1，所以它的特徵值是 -1（沿 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 方向）和 2（二重）。一個負特徵值加上兩個相等的正特徵值，正是圓錐的標誌：它是一個圓形的圓錐，軸沿着那個與別不同的特徵值所對應的特徵向量（eigenvector）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）在討論對稱矩陣和二次型時，對此有詳細的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。