詳細解答

STEP II 2010，第 4 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2010，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q4

關鍵思路

代換（substitution）$u = a - x$ 會把區間的兩端對調，並把 $f(x)$ 變成 $f(a-x)$，反之亦然。因此這個積分等於它的「拍檔」，後者的分子正是分母的另一半。把兩個版本相加，分子便等於分母，被積函數（integrand）就變成 1。題目餘下的部分，就是要在偽裝之下認出這個結構。第 (ii) 部分用的是同一招，只是代換改為 $x \mapsto 1/x$，它會把 $[\frac{1}{2}, 2]$ 的兩端對調。

解答

第 (i) 部分

我們全程假設在 $[0, a]$ 上 $f(x) + f(a-x) \neq 0$，使被積函數有定義。在 I 中代入 $u = a - x$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$。當 $x = 0$ 時，$u = a$；當 $x = a$ 時，$u = 0$。因此

$$I = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,\mathrm{d}u.$$

由於 u 是啞變量（dummy variable），我們可以把它改名為 x，這樣便得到所需的 I 的第二種形式。

現在把 I 的兩個表達式相加：

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a, \qquad \text{所以} \qquad I = \frac{a}{2}.$$

第一個積分。

? **想一想** $f(x) + f(a-x)$ 藏在 $\ln(2 + x - x^2)$ 的哪裏？

這個二次式可以因式分解：$2+x-x^2=(1+x)(2-x)$。所以

$$\ln(2+x-x^2)=\ln(1+x)+\ln(2-x),$$

這是成立的，因為兩個因式在 $[0,1]$ 上都是正數。取 $a=1$ 及 $f(x)=\ln(1+x)$。那麼 $f(1-x)=\ln(2-x)$，而被積函數正好是 $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$。分母永不為零，因為在 $[0,1]$ 上 $2+x-x^2\geq 2$。因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln(2+x-x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

第二個積分。 用複角公式（compound-angle formula）展開分母：

$$\sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\sin x\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

所以被積函數是 $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$。取 $a=\frac{\pi}{2}$ 及 $f=\sin$，便有 $f(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$。分母 $\sin x+\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是正數。由上面的結果，

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

第 (ii) 部分

把這個積分記為 J。它的被積函數是 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin(1/x)}$。分母沒有問題：對於 $x\in[\frac{1}{2},2]$，x 和 $1/x$ 都落在 $[\frac{1}{2},2]\subset(0,\pi)$ 之內，所以 $\sin x>0$ 且 $\sin(1/x)>0$。

> **想一想** 哪一個代換可以把 $\sin x$ 和 $\sin\frac{1}{x}$ 對調，同時保持上下限 $\frac{1}{2}$ 和 2？

答案是 $x=1/u$。這時 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$。當 $x=\frac{1}{2}$ 時，$u=2$；當 $x=2$ 時，$u=\frac{1}{2}$。因子 $\frac{1}{x}$ 變成 u，所以

$$J=\int_2^{1/2}u\cdot\frac{\sin(1/u)}{\sin(1/u)+\sin u}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big)=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin(1/u)}{u(\sin u+\sin\frac{1}{u})}\,\mathrm{d}u.$$

把 u 改名為 x，再與 J 原來的形式相加：

$$2J=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{x(\sin x+\sin\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln\tfrac{1}{2}=2\ln 2.$$

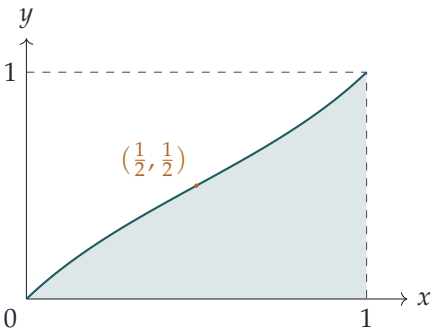
因此

$$\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x}{x(\sin x+\sin\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$

因子 $\frac{1}{x}$ 在這裏是不可或缺的。測度（measure）$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 在 $x\mapsto 1/x$ 之下保持不變（方向除外），正如 $\mathrm{d}x$ 在 $x\mapsto a-x$ 之下保持不變一樣。

驗算

- 被積函數 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$ 滿足 $g(x) + g(a-x) = 1$。因此它的圖像繞 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ 旋轉半圈後不變，所以曲線下的面積是 $a \times 1$ 長方形面積的一半。下圖以第一個積分為例說明這一點。



- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）計算，第一個積分得 0.500000，第二個得 1.110721（而 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1.110721$），第 (ii) 部分得 0.693147（而 $\ln 2 \approx 0.693147$）。

常見錯誤

- 改寫 $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ 時漏掉因子 $\sqrt{2}$，結果得出 $\frac{\pi}{4}$ 而不是 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。
- 在第 (ii) 部分，忘了跟進 $\frac{1}{x}$ 的去向：它變成 u，再與 $-\frac{1}{u^2}$ 合併，剩下 $-\frac{1}{u}$。

STEP 之外

這兩招都利用了區間的一種對稱性，而這種對稱性令積分的「測度」保持不變：反射（reflection）$x \mapsto a - x$ 保持 $\mathrm{d}x$ 不變，而反演（inversion）$x \mapsto 1/x$ 保持 $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 不變。到了大學，這會發展成不變測度（invariant measure）的概念。例如，$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是正實數在乘法之下的自然測度，也是梅林變換（Mellin transform）的基礎。關於代換法在實分析（real analysis）上的基礎，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。想看更多 STEP 風格的積分技巧，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。