詳細解答

STEP II 2010，第 3 題

純數學 • 斐波那契數與遞推關係

> **STEP II 2010，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q3

關鍵思路

已知四項，未知數也有四個：把 $n = 0, 1, 2, 3$ 代入 $(*)$ 再解方程。竅門是用一條方程除以另一條，這樣可以消去 a，並把條件化為關於 $\lambda + \mu$ 和 $\lambda\mu$ 的陳述。這兩個對稱函數（symmetric functions）使 λ 和 μ 成為某個二次方程（quadratic equation）的根。求出公式之後，第 (iii) 部分的和就可以拆成兩個幾何級數（geometric series）。

解答

第 (i) 部分

把 $n = 0, 1, 2, 3$ 代入 $(*)$，得

$$a + b = 0, \qquad a\lambda + b\mu = 1,$$
$$a\lambda^2 + b\mu^2 = 1, \qquad a\lambda^3 + b\mu^3 = 2.$$

由第一條得 $b = -a$，於是其餘三條變為

$$a(\lambda - \mu) = 1, \qquad a(\lambda^2 - \mu^2) = 1, \qquad a(\lambda^3 - \mu^3) = 2.$$

特別地，由 $a(\lambda - \mu) = 1$ 可知 $a \neq 0$ 且 $\lambda \neq \mu$。因式分解，

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu), \qquad \lambda^3 - \mu^3 = (\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2),$$

所以把第二及第三條方程除以 $a(\lambda - \mu) = 1$（因為它不為零，所以可以這樣做），得

$$\lambda + \mu = 1 \qquad \text{和} \qquad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 2,$$

其中第二條正是所求的結果。

想一想 怎樣從這兩條方程求出 λ 和 μ 本身？

把第二條用和與積表示：$\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu$，所以 $1-\lambda\mu=2$，即 $\lambda\mu=-1$。和為 1、積為 -1 的兩個數是以下方程的根：

$$t^2-t-1=0,\qquad \text{所以}\qquad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

哪一個根是 λ？由 $a(\lambda-\mu)=1$ 及 $a>0$，需要 $\lambda-\mu>0$，所以 λ 是較大的根。於是 $\lambda-\mu=\sqrt{5}$，而

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad \mu=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

（若把兩根對調，則必須 $a=-1/\sqrt{5}$，這是不容許的。）反過來，由於上面每一步都可逆，這些值滿足全部四條方程。

第 (ii) 部分

我們有 $F_6=(\lambda^6-\mu^6)/\sqrt{5}$。與其直接展開 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$，不如利用 λ 是 $t^2=t+1$ 的根這一事實來降次：

$$\begin{aligned}\lambda^2&=\lambda+1,\\ \lambda^3&=\lambda^2+\lambda=2\lambda+1,\\ \lambda^6&=(2\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1=4(\lambda+1)+4\lambda+1=8\lambda+5.\end{aligned}$$

μ 滿足同一條二次方程，所以完全同樣的推導亦成立，得 $\mu^6=8\mu+5$。因此

$$F_6=\frac{(8\lambda+5)-(8\mu+5)}{\sqrt{5}}=\frac{8(\lambda-\mu)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=8.$$

第 (iii) 部分

利用 $(*)$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n-\left(\frac{\mu}{2}\right)^n\right].$$

由於 $\lambda\approx 1.618$ 而 $\mu\approx -0.618$，兩個公比（common ratio）$\lambda/2$ 和 $\mu/2$ 的模（modulus）都小於 1。所以兩個幾何級數都收斂（converge），我們可以把和拆成兩者之差：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}&=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\lambda/2}-\frac{1}{1-\mu/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2-\lambda}-\frac{1}{2-\mu}\right]\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\lambda-\mu}{(2-\lambda)(2-\mu)}=\frac{1}{4-2(\lambda+\mu)+\lambda\mu},\end{aligned}$$

這裏用了 $\lambda-\mu=\sqrt{5}$。由 $\lambda+\mu=1$ 及 $\lambda\mu=-1$，分母為 $4-2-1=1$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=1.$$

驗算

公式應該給出整數：$F_4=(\lambda^4-\mu^4)/\sqrt{5}$，配合 $\lambda^4=3\lambda+2$ 得 $F_4=3$；而 $F_5=5$、$F_6=8$ 符合從前四項看到的規律 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。至於第 (iii) 部分，部分和（partial sums）$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{19}{32},\ldots$ 慢慢逼近 1；用數值方法把首 300 項相加，在機器精度內得 1.0000000。各項只以約 $(0.809)^n$ 的速度衰減，所以收斂得很慢。

常見錯誤

- 忘記利用 $a>0$ 來決定哪個根是 λ：沒有這個條件，答案便不能確定。
- 除以 $\lambda-\mu$ 時沒有說明它為何不為零（它不為零，因為 $a(\lambda-\mu)=1$）。
- 把無窮級數拆成兩個級數時，沒有檢查每個級數是否收斂。

STEP 之外

這裏的公式是斐波那契數（Fibonacci numbers）的比奈公式（Binet's formula），而所用的方法是處理線性遞推關係（linear recurrences）的一般方法：λ 和 μ 是 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 的特徵方程（characteristic equation）$t^2=t+1$ 的根。第 (iii) 部分其實是在 $x=\frac{1}{2}$ 處求生成函數（generating function）$\sum F_n x^n=x/(1-x-x^2)$ 的值（再取一半），結果同樣是 1。生成函數是大學一年級組合數學（combinatorics）和概率的重要工具；關於黃金比例（golden ratio）λ 以及斐波那契數在連分數（continued fractions）理論中的角色，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。