詳細解答

STEP II 2010，第 2 題

純數學 • 三角函數積分法

> **STEP II 2010，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q2

關鍵思路

三次式 $7\sin x - 8\sin^3 x$ 看來不易積分，但只要留意到它其實由三倍角公式（triple-angle formula）砌成，即 $\sin 3x$ 的兩倍再加上少許餘項，問題便迎刃而解。接着利用餘弦的三倍角公式，把答案變回 $c = \cos\alpha$ 的多項式（polynomial）。至於 Eustace 的積分，利用 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$ 可把他那個（錯誤的）答案化為同一個變數，再比較兩者，便得到一個 c 的四次方程（quartic），而題目已就它的根給了我們提示。

解答

三倍角公式

利用複角公式（addition formulae）及 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

正如所求。同樣地，利用 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$，

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

第 (i) 部分

由正弦的公式可得 $8\sin^3 x = 6\sin x - 2\sin 3x$，所以

$$7\sin x - 8\sin^3 x = \sin x + 2\sin 3x.$$

這樣積分便容易計算了：

$$\mathrm{I}(\alpha) = \Big[-\cos x - \tfrac{2}{3}\cos 3x \Big]_0^{\alpha} = -\cos\alpha - \tfrac{2}{3}\cos 3\alpha + 1 + \tfrac{2}{3}.$$

由餘弦的公式，$\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$，所以

$$\mathrm{I}(\alpha) = -c - \tfrac{2}{3}(4c^3 - 3c) + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{8}{3}c^3 + c + \tfrac{5}{3},$$

這正是我們要證明的結果。

至於使 $\mathrm{I}(\alpha) = 0$ 的 c 值：取 $\alpha = 0$，積分顯然等於零，所以 $c = 1$ 符合要求（驗算：$-\frac{8}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 0$）。事實上這是唯一的值，因為 $8c^3 - 3c - 5 = (c-1)(8c^2 + 8c + 5)$，而當中二次式的判別式（discriminant）為 $64 - 160 < 0$。

第 (ii) 部分

按 Eustace 的法則，$\int \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x$ 及 $\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x$，所以他算出的定積分（definite integral）之值為

$$\mathrm{E}(\alpha) = \Big[\tfrac{7}{2}\sin^2 x - 2\sin^4 x \Big]_0^{\alpha} = \tfrac{7}{2}s^2 - 2s^4, \qquad s = \sin\alpha.$$

為了與第 (i) 部分比較，寫成 $s^2 = 1 - c^2$：

$$\mathrm{E}(\alpha) = \tfrac{7}{2}(1 - c^2) - 2(1 - c^2)^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}c^2 - 2c^4.$$

$\cos\beta = -\frac{1}{6}$ **這個值**。 當 $c = -\frac{1}{6}$ 時，

$$\mathrm{I}(\beta) = -\tfrac{8}{3}\cdot\big(-\tfrac{1}{216}\big) - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{81} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{245}{162},$$
$$\mathrm{E}(\beta) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{36} - 2\cdot\tfrac{1}{1296} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{648} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{648} = \tfrac{245}{162}.$$

兩者相等，所以 Eustace 只是碰巧得到 $\mathrm{I}(\beta)$ 的正確值。

所有 α 的值。 Eustace 的答案正確，當且僅當 $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha)$，即（乘以 6 並整理各項後）

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = 0.$$

? **想一想** 沒有現成公式可用，我們怎樣把這樣的四次式因式分解（factorise）？

我們已經知道兩個根。由剛才的計算，$c = -\frac{1}{6}$ 符合方程，所以 $6c+1$ 是一個因式。另外 $c = 1$（即 $\alpha = 0$）也必定符合，因為 I 和 E 在該處都等於 0。除去因式 $6c+1$（比較 c^3 和 c 的係數），

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = (6c+1)(2c^3 - 3c^2 + 1),$$

然後，由於 $c = 1$ 是這個三次式的根，

$$2c^3 - 3c^2 + 1 = (c-1)(2c^2 - c - 1) = (c-1)^2(2c+1).$$

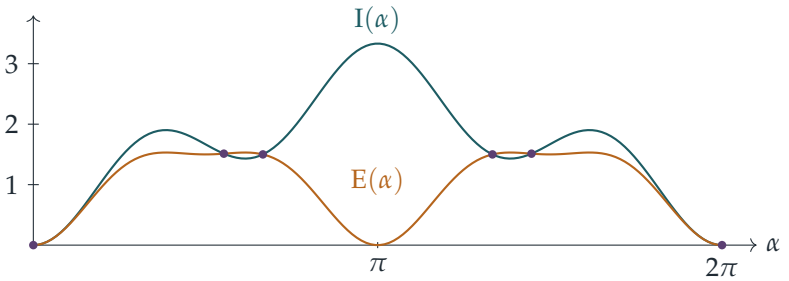
所以條件就是

$$(6c+1)(2c+1)(c-1)^2 = 0, \qquad \text{即} \qquad c = 1,\ -\tfrac{1}{2} \text{ 或 } -\tfrac{1}{6}.$$

由於 $c = \cos\alpha$，而 $[-1,1]$ 內每一個 c 值都對應某個 α，所以 Eustace 得到 $\mathrm{I}(\alpha)$ 的正確值，當且僅當對某個整數 n，

$$\alpha = 2n\pi, \qquad \alpha = 2n\pi \pm \tfrac{2\pi}{3}, \qquad \text{或} \qquad \alpha = 2n\pi \pm \arccos\left(-\tfrac{1}{6}\right).$$

（負的 α 也已包括在內：I 和 E 都只透過 $\cos\alpha$ 取決於 α。）下圖顯示在 $0 \le \alpha \le 2\pi$ 的範圍內，真正的積分（藍綠色）和 Eustace 的答案（琥珀色）；兩條曲線相交於 $\alpha = 0$、$\frac{2\pi}{3}$、$\arccos(-\frac{1}{6}) \approx 1.738$，以及這些點關於 $\alpha = \pi$ 的鏡像。



驗算

- 當 $\alpha = \pi (c = -1)$時，公式給出 $\mathrm{I}(\pi) = \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$，與 $\int_0^\pi (\sin x + 2\sin 3x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{4}{3}$ 吻合。
- 對原來的被積函數（integrand）使用森遜法則（Simpson's rule），得 $\mathrm{I}(\beta) \approx 1.5123457$，與 $\frac{245}{162} = 1.5123456\ldots$ 吻合；當 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 時，積分和 Eustace 的答案都等於 1.5。

常見錯誤

- 忘記代入下限：$-\cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = -\frac{5}{3}$，那個 $+\frac{5}{3}$ 正是由此而來。

- 沒有發現 $c = 1$ 是四次方程的二重根，甚或完全遺漏了它，只寫出 $c = -\frac{1}{2}$ 和 $c = -\frac{1}{6}$。
- 只給出 $[0, \pi]$ 內的 α；題目要求的是所有值。

STEP 之外

把 $\sin^3 x$ 這類冪寫成 $\sin x$ 與 $\sin 3x$ 的組合，正是傅立葉分析（Fourier analysis）的起點：每一個冪 $\sin^n x$ 都是有限個 $\sin kx$ 或 $\cos kx$ 之和，利用 $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ 便可很快求出。以 $\cos x$ 表示 $\cos nx$ 的多項式，就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）T_n，其中 $T_3(c) = 4c^3 - 3c$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）說明了為何有了棣美弗定理（de Moivre's theorem），這些恆等式全都變得自然而然。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。