詳細解答

STEP II 2010，第 13 題

概率與統計 • 獨立事件

STEP II 2010，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q13

關鍵思路

Rosalind 要合格，必須對 Pardeep 至少勝一局，並且對 Quentin 至少勝一局。「至少一次」用補集（complement）處理總是最容易：n 局中至少勝一局的概率，等於 1 減去全部落敗的概率。各局獨立（independent）時，每種策略的成功概率便是兩個這類因子的乘積，而比較策略就是把兩者之差因式分解（factorise）。以 $a = 1 - p$ 和 $b = 1 - q$ 表示落敗的概率，可使代數運算保持簡潔。

解答

我們假設不同對局的結果互相獨立，並且無論之前發生過甚麼，每局對 Pardeep（或 Quentin）的勝出概率都是 p（或 q）。對局的次序並不重要：無論她取得資格後是否停止比賽，她取得資格的結果都完全相同。

設 Rosalind 與 Pardeep 對賽 m 局、與 Quentin 對賽 n 局，令 A 為她對 Pardeep 至少勝一局的事件（event），B 為她對 Quentin 至少勝一局的事件。那麼 $\mathrm{P}(A) = 1 - (1-p)^m$，因為只有當她 m 局全敗時 A 才不發生；同理 $\mathrm{P}(B) = 1 - (1-q)^n$。這兩個事件涉及不同的對局，所以互相獨立，於是

$$\mathrm{P}(\text{獲接納}) = (1 - (1-p)^m)(1 - (1-q)^n).$$

以下一律記 $a = 1 - p$ 和 $b = 1 - q$。由於 $0 < p < q < 1$，我們有 $0 < b < a < 1$。

第 (i) 部分

與 Pardeep 對賽兩局、與 Quentin 對賽一局，成功概率為 $(1 - a^2)(1 - b)$；與 Quentin 對賽兩局、與 Pardeep 對賽一局，成功概率為 $(1 - a)(1 - b^2)$。把各個平方差（difference

of squares）因式分解，

$$\begin{aligned}(1-a^2)(1-b)-(1-a)(1-b^2) &= (1-a)(1-b)[(1+a)-(1+b)]\\ &= (1-a)(1-b)(a-b)\\ &= pq(q-p).\end{aligned}$$

由於 $p,q>0$ 且 $q>p$，此式嚴格為正。所以與 Pardeep 對賽兩局，獲接納的機會較大，她應該選擇這個方案。

第 (ii) 部分

三種策略的成功概率分別為

$$S_1=(1-a^3)(1-b),\qquad S_2=(1-a^2)(1-b^2),\qquad S_3=(1-a)(1-b^3).$$

三者都含有因子 $(1-a)(1-b)=pq$，因為 $1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$。

策略 1 必定勝過策略 3。我們有

$$\begin{aligned}S_1-S_3 &= pq[(1+a+a^2)-(1+b+b^2)]\\ &= pq\,(a-b)(1+a+b)>0,\end{aligned}$$

因為 $a>b$。所以策略 3 永遠不是最佳選擇，只需比較策略 1 和策略 2。

策略 1 對策略 2。我們有

$$S_1-S_2=pq[(1+a+a^2)-(1+a)(1+b)]=pq[a^2-b(1+a)].$$

換回 p 和 q，

$$S_1-S_2=pq\,D,\qquad \text{其中}\qquad D=(1-p)^2-(1-q)(2-p).$$

由於 $pq>0$，策略 1 優於策略 2 當且僅當 $D>0$。

? **想一想** 條件 $q-p>\frac{1}{2}$ 怎樣有助令 D 為正？

D 中唯一涉及 q 的項是 $-(1-q)(2-p)$，而由於 $2-p>0$，它隨 q 增加而增加。所以我們把 q 換成條件所容許的最小值。若 $q-p>\frac{1}{2}$，則 $1-q<\frac{1}{2}-p$，又因為 $2-p>0$，

$$(1-q)(2-p)<(\tfrac{1}{2}-p)(2-p)=1-\tfrac{5}{2}p+p^2.$$

因此

$$D>(1-2p+p^2)-(1-\tfrac{5}{2}p+p^2)=\tfrac{1}{2}p>0.$$

所以 $S_1>S_2$，連同 $S_1>S_3$，這就證明了當 $q-p>\frac{1}{2}$ 時 Rosalind 應該選擇策略 1。

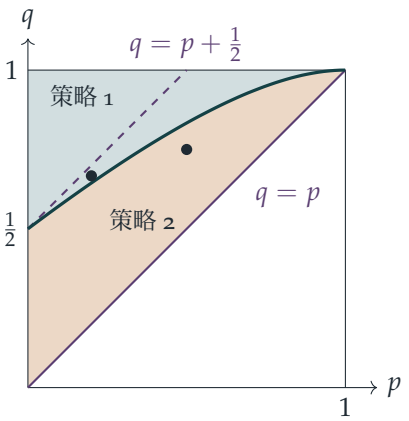
當 $q-p<\frac{1}{2}$ 時，兩者都有可能較優。以下是兩個例子：

- $p = \frac{1}{2}$，$q = \frac{3}{4}$（所以 $q - p = \frac{1}{4}$）。這時 $D = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{8} < 0$。事實上 $S_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{42}{64}$ 而 $S_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{64}$，所以**策略 2 較佳**。
- $p = \frac{1}{5}$，$q = \frac{2}{3}$（所以 $q - p = \frac{7}{15} < \frac{1}{2}$）。這時 $D = \frac{16}{25} - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{16}{25} - \frac{15}{25} = \frac{1}{25} > 0$。事實上 $S_1 = \frac{61}{125} \cdot \frac{2}{3} = \frac{122}{375}$ 而 $S_2 = \frac{9}{25} \cdot \frac{8}{9} = \frac{120}{375}$，所以**策略 1 較佳**。

在 (p, q) 平面上，整個情況一目了然。令 $D = 0$ 便得出邊界曲線 $q = 1 - \dfrac{(1-p)^2}{2-p}$。可以驗證

$$\left(p + \tfrac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{(1-p)^2}{2-p}\right) = \frac{p}{2(2-p)} > 0,$$

所以該曲線位於直線 $q = p + \frac{1}{2}$ 稍下方。在曲線之上，策略 1 最佳；在曲線與對角線 $q = p$ 之間，策略 2 最佳。



圖中兩點就是上面的兩個例子：$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 位於策略 2 的區域內，而 $(\frac{1}{5}, \frac{2}{3})$ 則剛好在曲線之上。

驗算

在第 (i) 部分，令 $q \to 1$：對 Quentin 必勝，所以只有對 Pardeep 的對局才有影響，而這類對局顯然愈多愈好，這與差值 $pq(q-p) \to p(1-p) > 0$ 吻合。至於第 (ii) 部分，我們隨機抽取了 2000 對滿足 $p < q$ 的數值，以分數精確地列舉全部 2^4 種結果，確認了 S_1, S_2, S_3 的公式和各個因式分解。以 $p = \frac{1}{2}$、$q = \frac{3}{4}$ 進行模擬（simulation），得出 $S_1 \approx 0.657$ 和 $S_2 \approx 0.703$，而精確值為 $\frac{21}{32} = 0.65625$ 和 $\frac{45}{64} \approx 0.7031$。

常見錯誤

- 把「至少勝一局」的概率算成 mp 而不是 $1-(1-p)^m$；把互相重疊的事件的概率相加，會重複計算。
- 忘記策略 3：要證明策略 1 最佳，必須同時勝過另外兩種策略。
- 舉出 $q-p<\frac{1}{2}$ 的例子，卻沒有檢查條件 $0<p<q<1$。

STEP 之外

直覺告訴我們「把力氣花在自己最弱的地方」，但第二部分顯示這並非永遠正確：多對 Pardeep 一局的效益會遞減（diminishing returns），而當 p 不太小時，多對 Quentin 一局更為划算。把固定數目的試驗分配到各處，使若干個「至少成功一次」的概率之積達到最大，正是可靠性理論（reliability theory）和實驗設計（design of experiments）背後那類最優化（optimisation）問題的一個小例子。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）仔細講解了獨立性和補集，並有許多同類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。