詳細解答

STEP II 2010，第 11 題

力學 • 三力平衡

> **STEP II 2010，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q11

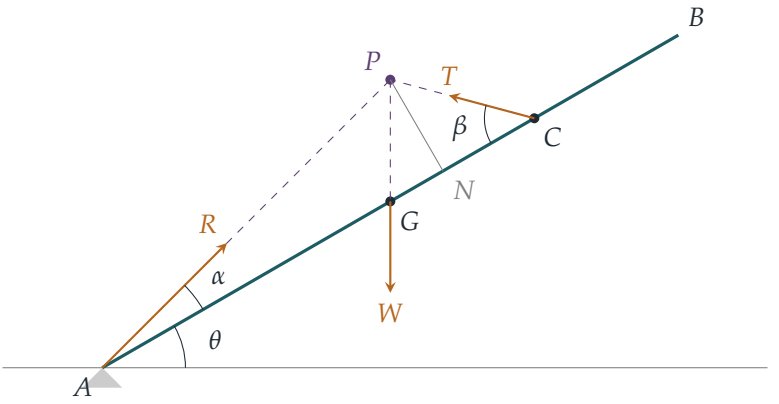
關鍵思路

作用於桿上的力只有三個：桿的重量、A 點的反作用力（reaction）和 C 點的張力（tension）。當三個互不平行的力使一個物體保持平衡（equilibrium）時，它們的作用線（line of action）必定通過同一點。因此，由 A 出發的反作用力所在直線、由 C 出發的繩所在直線，以及通過桿中點的鉛垂線，三者相交於一點。從這個公共點出發，沿桿的方向和垂直於桿的方向量度距離，整道題便化為簡單的直角三角學，完全不必求出各個力的大小。

解答

模型與圖示

我們把桿視為均勻剛性桿（uniform rigid rod），所以它的重量 W 作用於中點 G，其中 $AG = 2L$。繩是輕繩，所以它在 C 點沿繩本身的方向拉着桿，其中 $AC = 3L$。支承在 A 點對桿施加單一個力 R（題目沒有說明支承是光滑還是粗糙，而我們也不需要知道）。下圖按比例繪出 $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 的情況。



證明公式

重量沿鉛垂方向作用，其作用線通過 G；繩的作用線通過 C，反作用力的作用線則通過 A。這三條直線並不平行，所以三者都通過同一點，我們稱這點為 P。

? **想一想** 為甚麼三條作用線必定相交於一點？

設 R 和 T 的作用線相交於 P。對 P 取力矩（moment），R 和 T 的力矩都是零，所以桿若要處於轉動平衡，重量對 P 的力矩也必須是零。這就表示通過 G 的鉛垂線同樣通過 P。

設 N 為由 P 到桿的垂足，並設 $h = PN$。在直角三角形 PNA 中，A 處的角是 α，所以 $AN = h\cot\alpha$。在直角三角形 PNC 中，C 處的角是 β，所以 $NC = h\cot\beta$。由於 $AN + NC = AC$，

$$h\cot\alpha + h\cot\beta = 3L. \tag{1}$$

（若 α 或 β 是鈍角，N 便落在 A 或 C 之外，但帶正負號的長度 $h\cot\alpha$ 與 $h\cot\beta$ 之和仍然等於 AC，所以 (1) 在任何情況下都成立。）

現在利用第三條作用線。桿與水平線的夾角是 θ，所以垂線 PN 與鉛垂線 PG 的夾角也是 θ。在直角三角形 PNG 中，P 處的角是 θ，所以 $GN = h\tan\theta$，而且 N 位於 G 的上方一側（離 A 較遠），如圖所示。因此

$$h\cot\alpha = AN = AG + GN = 2L + h\tan\theta. \tag{2}$$

由 (1) 減去 (2)，得 $h\cot\beta = L - h\tan\theta$，即

$$L = h(\cot\beta + \tan\theta).$$

把 L 的這個值代入 (2)：

$$h\cot\alpha = 2h(\cot\beta + \tan\theta) + h\tan\theta = h(3\tan\theta + 2\cot\beta).$$

由於 $h \neq 0$（否則 P 會落在桿上的 G 點，而繫於 C 點的繩便會沿着桿的方向，無法抵銷重量對 A 的力矩），我們可以除以 h：

$$\cot\alpha = 3\tan\theta + 2\cot\beta,$$

這正是所需的結果。

$\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 的情況

由 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $\cot 45° = 1$，

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2 = 2 + \sqrt{3}.$$

現在我們需要 $\cot 15°$。利用 $\tan(A - B)$ 的公式，取 $A = 45°$、$B = 30°$，

$$\tan 15° = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

所以

$$\cot 15° = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

因此 $\cot\alpha = \cot 15°$。角 α 介乎 $0°$ 與 $180°$ 之間，而 cot 在這個區間上嚴格遞減（strictly decreasing），所以每個值它都恰好取一次。故此 $\alpha = 15°$。

驗算

- *另一條獨立的途徑。*對 A 取力矩，得 $T \cdot 3L\sin\beta = W \cdot 2L\cos\theta$。然後沿桿的方向和垂直於桿的方向分解各力，便得到 R 的兩個分量，而 $\cot\alpha$ 就是它們之比；這樣可以重新得出該公式。我們用這個方法，對 10^5 組隨機的 (θ, β) 作了數值檢驗，兩者吻合至約 10^{-15}。
- *特殊值。*當 $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 時，以數值方法求平衡，得 $\alpha = 15.000°$，而 $\cot 15° = 3.7320\ldots = 2 + \sqrt{3}$。圖是按比例繪畫的：$P$ 位於 G 的正上方，比 A 高出 $\sqrt{3}L$。
- *極限情況。*若 $\theta \to 0$ 而 $\beta = 90°$（桿水平，繩鉛垂），公式給出 $\cot\alpha = 0$，所以 $\alpha = 90°$：反作用力也是鉛垂的，而當其餘各力全是鉛垂時，這是必然的。

常見錯誤

- 把重量放在 C 點，或取 $AG = 3L/2$：重量作用於整枝桿的中點，與 A 相距 $2L$。

- 弄錯 GN 的正負號。由於桿從 A 起向上傾斜，通過 G 的鉛垂線與由 P 所作的垂線，相交於 G 遠離 A 的一側，所以 $AN = 2L + h\tan\theta$，而不是 $2L - h\tan\theta$。
- 寫到 $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$ 便停下來，既沒有證明這就是 $\cot 15°$，也沒有說明為甚麼這能唯一確定 α。

STEP 之外

三力定理（three-force theorem）是靜力學（statics）中一個普遍事實的特殊情況。作用於剛體（rigid body）上的任何力系，都可以化簡為通過某一選定點的單一個力，再加上一個力偶（couple），而平衡就是指兩者皆為零。到了大學，這會變成一個向量條件：合力與總力矩 $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ 都等於零，而這個條件正是剛體動力學的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）就是用這套向量語言來闡述力矩（torque）與平衡的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。