詳細解答

STEP II 2010，第 10 題

力學 • 彈性碰撞

> **STEP II 2010，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 10.2 節疊球效應中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/stacked-balls.html

關鍵思路

一切都建基於一次碰撞：一粒質點以完全彈性的方式撞向另一粒靜止的質點。動量守恆（conservation of momentum）加上牛頓實驗定律（Newton's experimental law，取 $e = 1$）便可求出傳遞出去的速率，而這個速率只取決於兩個質量之比。在第 (ii) 部分，每次碰撞的質量比都是 λ，所以每次碰撞都把速率乘以同一個因子，餘下的工作交給等比數列（geometric progression）就可以了。

解答

把各質點視為點質量，在光滑桌面上沿一條直線運動，所有速度均以 B 的初始運動方向為正方向量度。

第 (i) 部分

設 B 和 A 在緊接碰撞之後的速度分別為 v_B 和 v_A。由動量守恆得

$$bmu = bm\,v_B + m\,v_A,$$

又因為碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的（$e = 1$），按牛頓實驗定律，分離速率等於接近速率：

$$v_A - v_B = u.$$

把 $v_B = v_A - u$ 代入動量方程，並約去 m，

$$bu = b(v_A - u) + v_A \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{2bu}{b+1}.$$

所以 A 的速率是 $\dfrac{2b}{b+1}\,u$。

這條公式只用到質量比 b，而且推導對任何 $b > 0$ 都成立。由於 $b+1 > b$ 且 $u > 0$，

$$v_A = 2u \cdot \frac{b}{b+1} < 2u,$$

不論 b 取甚麼值都是如此。所以 A 永遠不可能以 B 初始速率的兩倍運動；不過只要把 b 取得夠大，它的速率可以任意接近 $2u$。

第 (ii) 部分

沿直線依次排列的質量為

$$B_1 : \lambda^n m, \quad B_2 : \lambda^{n-1} m, \quad \ldots, \quad B_n : \lambda m, \quad A : m.$$

每粒質點的質量都是下一粒的 λ 倍。所以每當一粒以速率 v 運動的質點撞上下一粒（靜止的）質點，第 (i) 部分的結果便適用，其中 $b = \lambda$，而被撞的質點會以速率 kv 離開，其中

$$k = \frac{2\lambda}{\lambda+1}.$$

由第 (i) 部分的方程 $v_B = v_A - u$ 可知，撞擊的質點會繼續向前運動，速率為

$$kv - v = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\, v,$$

由於 $\lambda > 1$，這個值是正數。

於是 B_1 令 B_2 得到速率 ku，然後 B_2 令 B_3 得到速率 k^2u，如此類推，直至以 $k^{n-1}u$ 運動的 B_n 令 A 得到速率

$$v_A = k^n u = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

? **想一想** 會不會有額外的碰撞，即某個 B_i 把速率傳遞出去之後，又追上前面的那一粒？

全部 n 次碰撞之後，B_i 以速率 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}k^{i-1}u$ 向前運動，其中 $i = 1, \ldots, n$，而 A 則以速率 $k^n u$ 運動。由於 $\lambda > 1$，我們有 $k > 1$（因為 $2\lambda > \lambda + 1$），所以這些速率沿着直線嚴格遞增：每粒質點都比它後面的那一粒快，彼此愈離愈遠。因此不會再有碰撞，A 的最終速率就是 $k^n u$。

因為 $k > 1$，當 $n \to \infty$ 時 $k^n \to \infty$。所以對任何目標速率 V，只要把 n 取得夠大，使 $k^n u > V$，便可令 A 的速率超過 V：A 的速率沒有上限。

$\lambda = 4$ 的情況

這時 $k = \frac{8}{5}$，我們要找出滿足 $\left(\frac{8}{5}\right)^n > 20$ 的最小 n。取以 10 為底的對數（logarithm；這是遞增函數，所以不等式的方向不變），

$$n \log_{10} \tfrac{8}{5} > \log_{10} 20.$$

寫成 $\frac{8}{5} = \frac{2^4}{10}$ 和 $20 = 2 \times 10$，

$$\log_{10} \tfrac{8}{5} = 4 \log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412,$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + 1 \approx 1.30103.$$

由於 $\log_{10} \frac{8}{5} > 0$，我們可以把兩邊同除以它，得

$$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37.$$

滿足此條件的最小整數是 $n = 7$。（這裏的餘裕相當充足：6.37 離整數很遠，所以 $\log_{10} 2$ 的近似值不會影響答案。）

驗算

- 在第 (i) 部分，$b = 1$ 給出 $v_A = u$ 和 $v_B = 0$：質量相等的質點互換速度，正該如此。當 $b \to \infty$ 時，$v_A \to 2u$。
- 動能（kinetic energy）：以 $v_A = \frac{2b}{b+1}u$ 和 $v_B = \frac{b-1}{b+1}u$ 代入，得 $bv_B^2 + v_A^2 = \frac{b(b-1)^2 + 4b^2}{(b+1)^2}u^2 = bu^2$，所以能量守恆。
- 直接計算：$1.6^6 \approx 16.78 < 20$ 而 $1.6^7 \approx 26.84 > 20$，確認 $n = 7$。用精確分數逐步模擬整條質點鏈，同樣得出 A 的速率在剛好 n 次碰撞之後恰為 $k^n u$。

常見錯誤

- 把質量的次序弄反：B_1 是最重的（$\lambda^n m$），B_n 是各個 B 之中最輕的（λm），而 A 比它還要輕。
- 把碰撞次數數成 $n - 1$ 次而不是 n 次：速率沿 $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$ 傳遞，共有 n 步。
- 忘記排除其後再發生碰撞的可能，或者答了非整數 6.37，而不是最小整數 $n = 7$。

STEP 之外

單獨一次彈性碰撞最多只能把速率加倍，但一連串碰撞卻沒有這個限制。這正是「疊球」示範背後的原理：把一個輕球疊在重球上面一同放下，輕球反彈的高度會遠遠超過它落下的高度。利用動量和能量來分析碰撞（更簡潔的做法是在質心參考系（centre-of-mass frame）中分析，在那裏彈性碰撞只是把每個速度反轉），是大學一年級力學的核心課題。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對此有深入的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。