詳細解答

STEP II 2010，第 1 題

純數學 • 曲率與密切圓

> **STEP II 2010，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q1

關鍵思路

「相切」(touches) 的意思是圓與曲線共有點 P，而且在該點的斜率 (gradient) 相同；「斜率的變化率」就是 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。因此我們要找一個圓，使它在 P 點的 y、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 全部與曲線的相應數值一致。把一般圓的方程作兩次隱函數微分 (implicit differentiation)，問題便化為關於圓心的簡單方程。

解答

曲線在 P 點的情況

對於 $y = 1 - x + \tan x$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \sec^2 x = \tan^2 x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\tan x \sec^2 x.$$

當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時，$\tan x = 1$ 且 $\sec^2 x = 2$，所以

$$y = 2 - \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 4.$$

因此 $P = (\frac{1}{4}\pi,\ 2 - \frac{1}{4}\pi)$。

圓

設圓的方程為 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$。對 x 作隱函數微分，得

$$(x-a) + (y-b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

再微分一次（對第二項使用積法則（product rule）），得

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-b)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

想一想 為甚麼可以把曲線的數值直接代入圓的方程？

這兩條方程在圓上每一點都成立，其中 y、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 是圓本身的數值。題目的兩個條件是說：在 P 點，圓通過 P，而且斜率與 C 相同，二階導數（second derivative）也相同。所以在 P 點我們可以取 $x=\frac{1}{4}\pi$、$y=2-\frac{1}{4}\pi$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=4$。

由第二條方程得

$$1+1+4(y-b)=0 \quad\Longrightarrow\quad y-b=-\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad b=2-\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi.$$

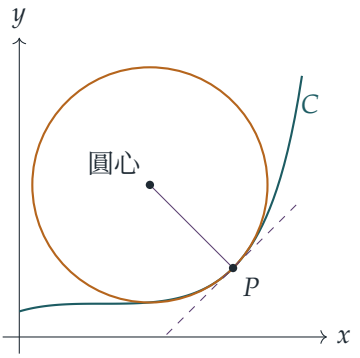
再由第一條方程得

$$x-a=-(y-b)\cdot 1=\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}.$$

最後，$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。所以密切圓（osculating circle）的

$$\text{圓心為}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi\right) \qquad \text{，半徑為} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

從幾何上看，這個結果是合理的。圓心與 P 相距 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，位於方向 $(-1,1)$ 上，而這個方向與斜率為 1 的切線（tangent）垂直。圓心位於 $y>2-\frac{1}{4}\pi$ 的一側，即曲線的上方；這是對的，因為 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2>0$，曲線在該處向上凹（concave upwards）。



驗算

- 一般的曲率半徑（radius of curvature）公式 $\rho=\left(1+y'^2\right)^{3/2}/|y''|$ 給出 $2^{3/2}/4=1/\sqrt{2}$，與上面求得的結果一致。

- 以數值計算，圓心約為 $(0.2854,\ 1.7146)$，P 約為 $(0.7854,\ 1.2146)$；兩點的距離為 0.70711。取圓的下半部分 $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$，在 $x = 0.7854$ 處作數值微分，得斜率 1.0000 和二階導數 4.000，與曲線吻合。

常見錯誤

- 把圓心放在切線的錯誤一側：$y - b$ 的正負號由第二條方程決定，所以讓代數運算來判斷就可以了。
- 忘記對 $(y-b)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 微分時要用積法則，而 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ 這一項正是由此而來。

STEP 之外

密切圓的半徑就是曲率半徑，它的倒數 $\kappa = |y''|/(1+y'^2)^{3/2}$ 就是曲率（curvature），是曲線微分幾何（differential geometry）中的核心量。對於空間曲線，曲率與撓率（torsion）一同出現在弗勒內–塞雷公式（Frenet–Serret formulae）中，這組公式描述曲線如何彎曲和扭轉。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）收錄了更多同類的 STEP 題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。