詳細解答

STEP I 2010，第 9 題

力學 • 摩擦力與平衡

> **STEP I 2010，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q9

關鍵思路

先把地面上的那個頂點放在一個已知位置，再沿兩條互相垂直的邊走到質心（centre of mass）：這樣便得出質心與牆的距離。至於平衡（equilibrium），「兩個接觸點均處於極限狀態」意味着每個摩擦力（friction）都等於 μ 乘以相應的法向反作用力（normal reaction），因此沿兩個方向分解力（resolving）後，兩個反作用力都可用重量表示。之後只需一條力矩（moment）方程便大功告成，而設 $\mu = \tan\lambda$ 則可把代數運算化為複角公式（compound-angle formulae）。

解答

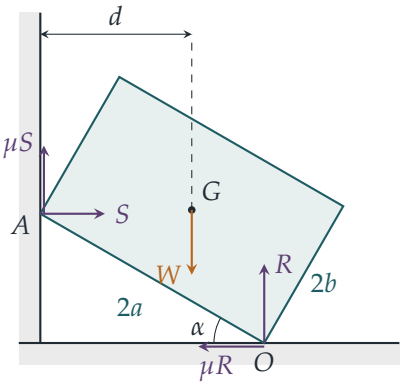
模型

薄片（lamina）是一塊重量為 W 的均勻剛性長方形，所以它的質心 G 就是它的中心。設 O 為地面上的頂點，A 為靠牆的頂點，於是 OA 是一條長度為 $2a$ 的邊，與地面成角 α，而由 O 出發、長度為 $2b$ 的邊則向上並向遠離牆的方向伸展。各力如下：

- 在 O 點：法向反作用力 R 向上，摩擦力 F 沿水平方向；
- 在 A 點：法向反作用力 S 沿水平方向指離牆壁，摩擦力 P 沿鉛垂方向；
- 重量 W 作用於 G，方向向下。

薄片正處於即將滑動的狀態，O 會向遠離牆的方向滑動，A 則會沿牆向下滑動，而摩擦力阻礙這些運動：F 指向牆壁，P 向上。由於兩個接觸點的摩擦力均達極限（limiting friction），

$$F = \mu R, \qquad P = \mu S.$$



質心與牆的距離

由於 OA 的長度為 $2a$，且與水平線成角 α，所以 O 與牆的水平距離為 $2a\cos\alpha$。

由 O 出發，沿 O 點的兩條邊各走一半，便到達 G。沿 OA（向牆的方向）走 a，我們便向牆移近了 $a\cos\alpha$。長度為 $2b$ 的邊與 OA 垂直，所以它與水平線成角 $\frac{1}{2}\pi-\alpha$，並向遠離牆的方向傾斜；沿它走 b，我們便遠離牆壁 $b\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=b\sin\alpha$。因此 G 與牆的距離為

$$d=2a\cos\alpha-a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\alpha+b\sin\alpha,$$

正如所求。同理，G 在地面之上的高度為 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$，而 A 在地面之上的高度為 $2a\sin\alpha$。

平衡條件

沿水平和鉛垂方向分解力，

$$S=\mu R,$$
$$R+\mu S=W.$$

把第一式代入第二式，得 $R(1+\mu^2)=W$，所以

$$R=\frac{W}{1+\mu^2},\qquad S=\frac{\mu W}{1+\mu^2}.$$

現在對 O 取力矩，這樣便消去了 R 和 μR。在水平方向上，G 比 O 更接近牆壁 $2a\cos\alpha-d=a\cos\alpha-b\sin\alpha$，所以重量的力矩為 $W(a\cos\alpha-b\sin\alpha)$，傾向使薄片朝牆的方向轉動。在 A 點，力 S 的作用線位於 O 之上 $2a\sin\alpha$ 的高度，而 μS 沿牆作用，與 O 的水平距離為 $2a\cos\alpha$；兩者都傾向使薄片朝遠離牆的方向轉動。所以

$$W(a\cos\alpha-b\sin\alpha)=S\cdot 2a\sin\alpha+\mu S\cdot 2a\cos\alpha=\frac{2a\mu W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{1+\mu^2}.\qquad(*)$$

想一想 設 $\mu = \tan\lambda$ 如何把右邊化簡？

設 $\mu = \tan\lambda$，則 $1 + \mu^2 = \sec^2\lambda$，所以

$$\frac{\mu}{1+\mu^2} = \tan\lambda\cos^2\lambda = \sin\lambda\cos\lambda,$$
$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}.$$

因此 $(*)$ 的右邊是 $2aW\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)$。約去 W，並利用 $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$，其中 $P = \alpha+\lambda$，$Q = \lambda$，

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= a\cos\alpha - 2a\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda) \\ &= a\cos\alpha - a\big(\cos\alpha - \cos(\alpha+2\lambda)\big) \\ &= a\cos(2\lambda+\alpha), \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

正方形薄片

若薄片是正方形，則 $b = a$，兩邊除以 $a \neq 0$，

$$\cos(2\lambda+\alpha) = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right).$$

所以對某個整數 k，有 $2\lambda+\alpha = \pm\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) + 2k\pi$。我們需要選出正確的分支。這裏 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$(薄片是傾斜的)，而且由於 $\mu > 0$，有 $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$，所以 $0 < 2\lambda+\alpha < \frac{3}{2}\pi$。

- 取 $+$ 號得 $2\lambda+\alpha = \frac{1}{2}\pi - \alpha + 2k\pi$；只有 $k = 0$ 落在 $(0, \frac{3}{2}\pi)$ 之內（因為 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 位於 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內），由此得 $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$。
- 取 $-$ 號得 $2\lambda = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$，即 $\lambda = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$，而這樣的值沒有一個位於 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。

因此 $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$，正如所求。(特別地，這種極限平衡需要 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$，這與 G 必須位於 O 靠牆一側的要求吻合：$a\cos\alpha > a\sin\alpha$。)

驗算

- 若 $\mu = 0$（$\lambda = 0$)，條件變為 $a\cos\alpha = b\sin\alpha$：$G$ 在 O 的正上方，這正是薄片無需牆壁幫助、僅靠頂點便能平衡的情況。
- 對於 $\alpha = 15°$ 的正方形，結果給出 $\lambda = 30°$，所以 $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$。把 $a = b = 1$、$\alpha = \frac{\pi}{12}$、$\mu = 1/\sqrt{3}$ 代入 $(*)$，兩邊都等於 $W(\cos 15° - \sin 15°) \approx 0.707W$。

- 在數值方面，我們隨機選取了 2000 組長方形和角度，以二分法（bisection）從力和力矩方程求出 μ，並確認 $a\cos(2\lambda+\alpha) = b\sin\alpha$ 成立，誤差在 10^{-14} 以內。

常見錯誤

- 弄錯摩擦力的方向：應先判斷每個接觸點會向哪個方向滑動，然後取相反的方向。
- 把與牆的距離 $a\cos\alpha + b\sin\alpha$ 當作對 O 的力臂（moment arm）；對 O 的力臂其實是 $a\cos\alpha - b\sin\alpha$。
- 忘記了 $\lambda = \frac{3}{4}\pi$ 也是該三角方程的解；它之所以被排除，是因為 $\mu > 0$ 使得 $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

滿足 $\tan\lambda = \mu$ 的角 λ 稱為摩擦角（angle of friction）：在極限摩擦時，總接觸力與法線成角 λ。另有一個巧妙的方法，利用的是以下事實：剛體（rigid body）在三個力作用下平衡，這三個力必須共點（concurrent）：兩個總接觸力與重量必須交於一點，於是問題便化為純粹的幾何問題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）在講述牛頓力學其他內容的同時，也闡述了剛體靜力學和摩擦。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。