詳細解答

STEP I 2010，第 8 題

純數學 • 無窮遞降法

> **STEP I 2010，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q8

關鍵思路

兩部分用的是同一個技巧，稱為*無窮遞降法*（infinite descent）。首先考慮方程模（modulo）某個質數（prime）的情況（第 (i) 部分取 3，第 (ii) 部分取 5），會發現這個質數必定整除每一個未知數。把它除去之後，便得到*完全相同的方程*的一個更小的解，而一個非零整數不可能無止境地被 3（或 5）整除。真正要花工夫的，只是找出哪些餘數（residue）可能出現，而在第 (ii) 部分，四次方（fourth power）的末位數字已替我們完成這一步。

解答

第 (i) 部分

移項整理，得

$$a^3 = 9c^3 - 3b^3 = 3(3c^3 - b^3),$$

所以 3 整除 a^3。由於 3 是質數，若它整除乘積 $a \cdot a \cdot a$，則它必整除其中一個因子，所以 $3 \mid a$。

設 $a = 3a_1$，其中 a_1 為整數。代入後除以 3：

$$27a_1^3 + 3b^3 = 9c^3 \quad \Longrightarrow \quad 9a_1^3 + b^3 = 3c^3,$$

所以 $b^3 = 3(c^3 - 3a_1^3)$ 可被 3 整除，同理可得 $3 \mid b$。設 $b = 3b_1$；則

$$9a_1^3 + 27b_1^3 = 3c^3 \quad \Longrightarrow \quad c^3 = 3(a_1^3 + 3b_1^3),$$

所以亦有 $3 \mid c$。這證明了 a、b 和 c 全都可被 3 整除。

現在再設 $c = 3c_1$。最後一條方程變成 $27c_1^3 = 3a_1^3 + 9b_1^3$，即

$$a_1^3 + 3b_1^3 = 9c_1^3.$$

? **想一想** 我們已證明 3 整除所有未知數。為甚麼這樣就迫使它們全部等於零？

因為 $(a_1, b_1, c_1) = (a/3,\, b/3,\, c/3)$ 同樣是原來方程的一個整數解，所以剛才證明的一切對它同樣適用：a_1、b_1、c_1 可被 3 整除，即 a、b、c 可被 9 整除。把這個論證重複 k 次，可知對每個 $k \geq 1$，3^k 都整除 a、b 和 c 各數。但一旦 $3^k > |n|$，非零整數 n 便不能被 3^k 整除。因此 $a = b = c = 0$，而這顯然是一個解，所以它是唯一的解。

（等價的說法：假如存在 $(0,0,0)$ 以外的解，從中選取 $|a| + |b| + |c|$ 為正數而又盡可能小的一個；那麼 $(a/3, b/3, c/3)$ 也是一個解，而且對應的正數值更小，矛盾。）

第 (ii) 部分

由於 $p^4 = |p|^4$，p^4 的末位數字只取決於 $|p|$ 的末位數字：

n 的末位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4 的末位數字	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

（例如 $2^4 = 16$、$3^4 = 81$、$7^4 = 2401$。）所以四次方的末位數字是 0、1、5 或 6，而且末位是 0 或 5 當且僅當 $5 \mid n$。

現在逐項看末位數字。

- $5r^4$ 是 5 的倍數，所以末位是 0 或 5。
- $2q^4$ 的末位是 0（若 q^4 的末位是 0 或 5）或 2（若 q^4 的末位是 1 或 6）。
- p^4 的末位是 0、1、5 或 6。

把 $\{0,1,5,6\}$ 中的一個末位數字與 $\{0,2\}$ 中的一個相加，結果的末位是 $0,1,5,6,2,3,7,8$ 其中之一。要得到 0 或 5，只有 $0+0$ 和 $5+0$ 兩種方式。所以 $2q^4$ 的末位是 0，也就是說 q^4 的末位是 0 或 5，即 $5 \mid q$；而 p^4 的末位是 0 或 5，即 $5 \mid p$。這證明了 p 和 q 可被 5 整除。

（另一做法：根據費馬小定理（Fermat's little theorem），當 $5 \nmid n$ 時 $n^4 \equiv 1 \pmod 5$，所以 $p^4 + 2q^4$ 模 5 同餘（congruent）於 $0+0$、$1+0$、$0+2$ 或 $1+2$，當中只有第一個是 0。）

設 $p = 5p_1$ 及 $q = 5q_1$。則

$$625\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) = 5r^4 \quad \Longrightarrow \quad r^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right),$$

所以 $5 \mid r^4$，又因為 5 是質數，故 $5 \mid r$。設 $r = 5r_1$，得

$$625r_1^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) \quad \Longrightarrow \quad p_1^4 + 2q_1^4 = 5r_1^4.$$

所以 $(p/5, q/5, r/5)$ 同樣是同一方程的整數解。

與第 (i) 部分完全一樣，重複這個步驟可知對每個 k，5^k 都整除 p、q 和 r 各數，而這對非零整數來說是不可能的。因此唯一的整數解是 $p = q = r = 0$。

驗算

用電腦搜尋，在 $|a|, |b|, |c| \le 60$ 的範圍內，$a^3 + 3b^3 = 9c^3$ 除 $(0,0,0)$ 外沒有其他解；在 $|p|, |q|, |r| \le 150$ 的範圍內，$p^4 + 2q^4 = 5r^4$ 亦然。逐一檢查 p 和 q 末位數字的全部 100 種組合，可確認只有當兩個末位數字都是 0 或 5 時，$p^4 + 2q^4$ 的末位才是 0 或 5。再用手算快速核對一下：取 $p = q = 1$，得 $p^4 + 2q^4 = 3$，不是 5 的倍數，與上表所示一致。

常見錯誤

- 證明了 3（或 5）整除每個未知數之後便停下來。單憑這一點並不能得出零；關鍵在於除去該因數後，得到的是同一條方程的解，所以論證可以重複下去。
- 由「$3 \mid a^3$」推出「$3 \mid a$」而不說明理由。這一步成立是因為 3 是質數；換成例如由 $9 \mid a^3$ 推出 $9 \mid a$ 就不成立（試試 $a = 3$）。
- 列出末位數字時忘記了負整數。四次方是偶數次冪，所以 $p^4 = |p|^4$，上表已涵蓋所有情況。

STEP 之外

無窮遞降法可追溯至費馬（Fermat），他用這個方法證明了 $x^4 + y^4 = z^2$ 沒有正整數解（從而證明了費馬最後定理（Fermat's Last Theorem）中 $n = 4$ 的情況）。這裏用到的想法是：如果一條方程模某個質數的冪沒有非平凡（non-trivial）解，它就不可能有非平凡的整數解；這個想法進一步發展，便成為 p 進數（p-adic numbers）和哈塞原理（Hasse principle）的研究。達文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是一本介紹同餘與遞降法的優美入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。