詳細解答

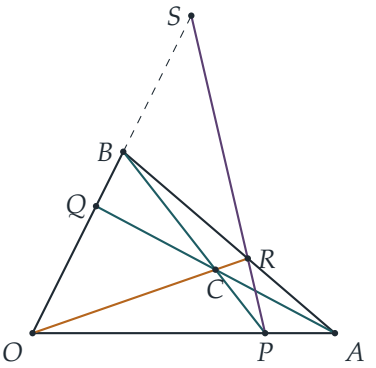
STEP I 2010，第 7 題

純數學 • 向量與相交直線

> **STEP I 2010，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q7

關鍵思路

由於 O、A 和 B 不共線（collinear），平面上每一點都可以寫成 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ 的形式，而且寫法唯一。因此，要找出兩條直線的交點，我們可以把每條直線上的一般點寫成這個形式，然後比較 **a** 和 **b** 的係數（coefficient）。一點位於直線 OB 上，當且僅當它的 **a** 係數為零；位於 AB 上，則當且僅當它的兩個係數之和為 1。這兩個事實幾乎包辦了全部工作。



圖中取 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{7}{20}$。留意 S 位於直線 OB 上，但在線段（segment）OB 之外，而 Q 則位於 O 與 B 之間。

解答

求 p 和 q

直線 BC 上的一般點為

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mu\alpha\,\mathbf{a} + (1 - \mu(1 - \beta))\mathbf{b}.$$

直線 OA 上的點具有 $\lambda\mathbf{a}$ 的形式，沒有 $\mathbf{b}$ 分量。由於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行（因為 O、A、B 不共線），我們可以比較係數。$\mathbf{b}$ 的係數必須為零，所以 $\mu = \dfrac{1}{1-\beta}$；這樣做是可以的，因為 $\beta < 1 - \alpha < 1$，所以 $1 - \beta \neq 0$。於是

$$\mathbf{p} = \mu\alpha\,\mathbf{a} = \frac{\alpha\mathbf{a}}{1-\beta},$$

正如所求。

整個設定在對調 $A \leftrightarrow B$ 及 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 之下是對稱的（這同時對調了 $P \leftrightarrow Q$），所以我們可以直接寫出

$$\mathbf{q} = \frac{\beta\mathbf{b}}{1-\alpha}.$$

點 R

首先，$\mathbf{r} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\,\mathbf{c}$ 是 $\mathbf{c}$ 的純量倍數（scalar multiple），所以 R 位於直線 OC 上。

其次，把它寫成 $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$，其中 $t = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$。事實上 $1 - t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$，這正是 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{r}$ 中的係數。形如 $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} = \mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 的點恰好就是直線 AB 上的點，所以 R 也位於 AB 上。

點 S

直線 PR 上的一般點為 $\mathbf{p} + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$，它等於

$$\left[\frac{\alpha}{1-\beta} + t\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\right]\mathbf{a} \;+\; \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}.$$

要使這一點位於 OB 上，$\mathbf{a}$ 的係數必須為零。兩邊除以 $\alpha \neq 0$，得

$$\frac{1}{1-\beta} = t \cdot \frac{(\alpha+\beta) - (1-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+\beta)}, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta-1}.$$

（題目告訴我們這兩條直線相交，這就迫使 $\alpha + 2\beta \neq 1$。若 $\alpha + 2\beta = 1$，則 PR 與 OB 平行。）因此

$$\mathbf{s} = \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b} = \frac{\beta}{\alpha+2\beta-1}\,\mathbf{b}.$$

想一想 怎樣由位置向量（position vector）$k\mathbf{b}$ 得出該點與 O 的距離和與 B 的距離之比？

若 X 的位置向量為 $k\mathbf{b}$，則 $\overrightarrow{OX} = k\mathbf{b}$ 而 $\overrightarrow{BX} = (k-1)\mathbf{b}$，所以

$$\frac{OX}{BX} = \frac{|k|}{|1-k|}.$$

這裏的絕對值（absolute value）很重要，因為 k 可以是負數，也可以大於 1，圖中的 S 正是如此。

兩個比

對於 Q，我們有 $k = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$，而且 $0 < k < 1$，因為 $0 < \beta < 1-\alpha$。於是 $1-k = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$，所以

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

對於 S，我們有 $k = \dfrac{\beta}{\alpha+2\beta-1}$，所以

$$1-k = \frac{\alpha+2\beta-1-\beta}{\alpha+2\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1'}, \qquad \frac{k}{1-k} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

取絕對值，並利用 $\beta > 0$ 和 $1-\alpha-\beta > 0$，得

$$\frac{OS}{BS} = \left|\frac{k}{1-k}\right| = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{OQ}{BQ}.$$

證明至此完成。取絕對值之前的那個負號說明：Q 內分（divides internally）OB，而 S 則外分（divides externally）它，兩者的比相同。

驗算

- 試取 $\alpha = \frac{1}{2}$，$\beta = \frac{7}{20}$（即圖中的情況）。這時 $\mathbf{q} = 0.7\mathbf{b}$ 而 $\mathbf{s} = 1.75\mathbf{b}$，所以 $OQ/BQ = 0.7/0.3 = \frac{7}{3}$ 及 $OS/BS = 1.75/0.75 = \frac{7}{3}$。公式給出 $\beta/(1-\alpha-\beta) = 0.35/0.15 = \frac{7}{3}$。
- 我們隨機選取 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、α、β，直接解成對的直線方程以計算全部四個交點，再與公式比較，並檢查兩個比是否相等。在超過 8000 個個案中，結果全部吻合。
- 對稱性：對調 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 及 $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$，會把 $\mathbf{p}$ 的公式變成 $\mathbf{q}$ 的公式，正該如此。

常見錯誤

- 忘記取絕對值。**s** 的係數可以是負數，也可以大於 1，這時不小心直接用 $k/(1-k)$，便會得出一個負的「長度之比」。
- 比較 **a** 和 **b** 的係數，卻沒有說明為甚麼可以這樣做。這個做法之所以成立，是因為 **a** 與 **b** 不平行。

STEP 之外

點 Q 和 S 以相同的比內分和外分 OB，所以它們是關於 O 和 B 的調和共軛（*harmonic conjugates*）。這裏的圖形，即四條直線連同它們的交點，就是經典的完全四邊形（*complete quadrilateral*）。調和分割（harmonic division）在投影（projection）之下保持不變，是射影幾何（projective geometry）的核心概念之一。把點用兩個獨立向量表示，再比較係數，這個習慣正是線性代數（linear algebra）的起點；在線性代數中，它發展成為基（basis）的概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）闡述了這方面的內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。