詳細解答

STEP I 2010，第 6 題

純數學 • 降階法

> **STEP I 2010，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q6

關鍵思路

只要知道二階線性微分方程（linear second-order equation）的一個解，把通解（general solution）寫成這個已知解乘以一個未知函數 u，所有只含 u 本身（不帶導數）的項便會互相抵消。餘下的只涉及 u' 和 u''，所以它其實是關於 $v = u'$ 的一階方程，而且這個方程是可分離變數（separable）的。這種技巧稱為*降階法*（reduction of order）。

解答

驗證 $y = \mathrm{e}^x$ 是解

若 $y = \mathrm{e}^x$，則 $y' = y'' = \mathrm{e}^x$，所以

$$(x-1)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x - 1 - x + 1)\mathrm{e}^x = 0,$$

因此 $y = \mathrm{e}^x$ 滿足 $(*)$。

關於 u 的方程

設 $y = u\mathrm{e}^x$。由積法則（product rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (u' + u)\,\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= (u'' + u')\,\mathrm{e}^x + (u' + u)\,\mathrm{e}^x = (u'' + 2u' + u)\,\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

代入 $(*)$ 的左方，並抽出因子 e^x：

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x[(x-1)(u''+2u'+u)-x(u'+u)+u]\\&\quad=\mathrm{e}^x[(x-1)u''+(2x-2-x)u'+(x-1-x+1)u]\\&\quad=\mathrm{e}^x[(x-1)u''+(x-2)u'].\end{aligned}$$

含 u 的項互相抵消，情況與我們驗證 $y=\mathrm{e}^x$ 時完全一樣（那次驗證正是 $u=1$ 的情形）。由於 e^x 永不為零，$y=u\mathrm{e}^x$ 滿足 $(*)$ 當且僅當

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+(x-2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0,$$

這就是 $(**)$，正如題目所求。

先解 v，再解 u

設 $v=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$(**)$ 便化為一階方程

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(x-2)\,v.$$

其中一個解是 $v=0$。除此之外，在 $x\neq1$ 且 $v\neq0$ 的區間上，我們可以分離變數：

$$\int\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v=-\int\frac{x-2}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣求 $\dfrac{x-2}{x-1}$ 的積分？

把分子用分母表示：$x-2=(x-1)-1$，所以

$$\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}.$$

因此

$$\ln|v|=-x+\ln|x-1|+c,\qquad\text{所以}\qquad v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x},$$

其中 $C=\pm\mathrm{e}^c$。若容許 $C=0$，便連 $v=0$ 這個解也包括在內，所以 $v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x}$，其中 C 為任意常數。（不難直接驗證，這個解對所有 x（包括 $x=1$）都滿足 $(x-1)v'+(x-2)v=0$。）

現在求積分以得出 u。運用分部積分法（integration by parts），對 $(x-1)$ 求導、對 e^{-x} 求積分，

$$\begin{aligned}\int(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

所以 $u = -Cx\mathrm{e}^{-x} + B$。把 $-C$ 改記為 A，

$$u = Ax\mathrm{e}^{-x} + B,$$

其中 A 和 B 為任意常數。

最後部分

上文已證明，只要 u 滿足 $(**)$，$y = u\mathrm{e}^{x}$ 便滿足 $(*)$。我們求得的 $u = Ax\mathrm{e}^{-x} + B$ 滿足 $(**)$，因為它的導數是 $v = -A(x-1)\mathrm{e}^{-x}$，而這正是關於 v 的方程的解。因此，對任意常數 A 和 B，

$$y = u\mathrm{e}^{x} = (Ax\mathrm{e}^{-x} + B)\mathrm{e}^{x} = Ax + B\mathrm{e}^{x}$$

都滿足 $(*)$，正如題目所求。

驗算

直接驗證 $y = x$：$y' = 1$，$y'' = 0$，所以 $(*)$ 的左方是 $0 - x + x = 0$。由於 $(*)$ 是線性的，x 和 e^{x} 這兩個解的任何組合 $Ax + B\mathrm{e}^{x}$ 同樣是解。再作一次數值驗算：取 $A = 2$、$B = -1$ 及 $x = 0.5$，則 $y = 1 - \mathrm{e}^{0.5} \approx -0.64872$，$y' = 2 - \mathrm{e}^{0.5} \approx 0.35128$，$y'' = -\mathrm{e}^{0.5} \approx -1.64872$，得出 $(-0.5)(-1.64872) - 0.5(0.35128) - 0.64872 = 0.82436 - 0.17564 - 0.64872 = 0$。

常見錯誤

- 忘記積法則在 y'' 中給出的是 $2u'$（而不是 u'）。
- 沒有先分拆出 1，便直接把 $\frac{x-2}{x-1}$ 當作對數來積分。
- 對 v 求積分以得出 u 時漏掉常數。正是這個常數 B 把原來的解 e^{x} 帶回來。

STEP 之外

降階法適用於任何線性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$：若 y_1 是其中一個解，代入 $y = uy_1$ 總會得出一個關於 u' 的一階方程。配合關於朗斯基行列式（Wronskian）的阿貝爾（Abel）公式，可以證明所有解構成一個二維向量空間（vector space），所以在每個不包含奇點（singular point）$x = 1$ 的區間上，$Ax + B\mathrm{e}^{x}$ 其實就是本題的通解。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（一本常微分方程入門教科書）對這兩個概念都有講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。